Paradigma funzionale

Linguaggio Haskell

Paradigmi imperativo e funzionale

Paradigma funzionale si contrappone
al paradigma imperativo dove:

- l'esecuzione programma comporta
  l'esecuzione di una sequenza di istruzioni
- istruzione base, modifica di una variabile, locazione di memoria

Paradigma imperativo usato nelle implementazioni hardware, linguaggi macchina

- macchina di von Neumann

Gran parte dei linguaggi di programmazione usano il paradigma imperativo

- linguaggi procedurali (di von Neumann)
- linguaggi ad oggetti

Paradigma funzionale

Paradigma di programmazione:

- dichiarativo
  - il programma consiste nella definizione di una serie di funzioni e di costanti

Differenze rispetto all'imperativo

- assenza di stato
  - non si accede direttamente alla memoria (store)
  - non esistono variabili modificabili
- diverso meccanismo di computazione
  - non si esegue una sequenza di istruzioni
  - si valuta un'espressione
    - dal punto di vista astratto: sequenza di riscritture
    - concreto: macchina a stack, attivo tanti RdA

Meccanismo di valutazione teorico - riscrittura

Data la definizione:

```
fatt n = if n == 0 then 1 else  n * (fatt (n - 1))
```

la valutazione di `fatt 3` porta a valutare nell'ordine:

```
if 3 == 0 then 1 else 3 * (fatt (3 - 1))
3 * (fatt 2)
3 * (if 2 == 0 then 1 else 2 * (fatt (2 - 1)))
3 * 2 * (fatt 1)
...
```

passi di computazione:

- sostituisco una chiamata di funzione con il suo corpo istanziato
  - `fatt 2` diventa `if 2 == 0 then 1 else 2 * (fatt (2 - 1))`
- applico le funzioni di base, sostituisco una sottoespressione con il suo valore:
  - `3 - 1` diventa `2`

Meccanismo di valutazione implementato

Uso degli ambienti, la valutazione di:

```
fatt 3
```

diventa la valutazione dell'espressione

```
if n == 0 then 1 else  n * (fatt (n - 1))
```

nell'ambiente

```
n ==> 3
fatt ==>  (lambda n)  if n == 0 then 1 else  n * (fatt (n - 1)
```

che a sua volta per essere valutata, porta alla valutazione di

```
n == 0
```

nell'ambiente . . . ..

Meccanismo di valutazione implementato

Si crea una pila di espressioni da valutare, con relativi ambienti di valutazione.

Struttura complessa:

- macchina SECD di Landin (1964)
- base per le implementazioni attuali

Paradigma funzionale

- l'assenza di stato comporta l'assenza di cicli (`while`)
  - la valutazione di un'espressione porta sempre allo stesso risultato, non ha senso ripeterla
  - cicli sostituiti da funzioni ricorsive, si valuta la stessa funzione con argomenti diversi,
- funzioni oggetti del primo ordine,
  - funzioni di ordine superiore
    funzioni come argomento o risultato di altre funzioni
  - funzioni senza nome
    `(lambda (x) (+ x 1))`
    espressioni che rappresentano una funzione
- polimorfismo
  - riuso del codice attraverso funzioni che si adattano a tipi di dato diversi
    - type checking dinamico: Scheme
    - type checking statico: Haskell, schemi di tipo, type checking sofisticato

Vantaggi del paradigma funzionale

L'assenza di stato semplifica l'analisi del programma

- non ci sono effetti collaterali
  - descrizione di una funzione fatta solo in termini in IO
  - stesso input - stesso output, tutte le dipendenze sono esplicite, semplifica in debugging
  - più semplice parallelizzare, ordine di valutazione non importante
  - semplifica la precompilazione
- non è possibile l'aliasing

Esempi

- Un esempio di errore creato dall'aliasing, modello per riferimento, errore che era presente in una libreria Java)
  - Classe per l'accesso protetto alle risorse
  - accedo alla risorsa con il metodo `useTheResource`
  - il metodo controlla che solo gli utenti nella lista `allowedUsers` possano accedere
  - è possibile ricevere la lista `allowedUsers` per controllare la propria priorità.

Codice

```
class ProtectedResource {
    private Resource theResource = ...;
    private String[] allowedUsers = ...;
    public String[] getAllowedUsers() {
        return allowedUsers;
    }
    public String currentUser() { ... }
    public void useTheResource() {
        for(int i=0; i < allowedUsers.length; i++) {
        if(currentUser().equals(allowedUsers[i])) {
            ... // access allowed: use it
        return; }}
        throw new IllegalAccessException();}}
```

Patch

Far restituire da `getAllowedUsers()` una copia della lista interna

```
public String[] getAllowedUsers() {
    String[] copy = new String[allowedUsers.length];
    for(int i=0; i < allowedUsers.length; i++)
        copy[i] = allowedUsers[i];
    return copy;
}
```

In programmazione funzionale

- il problema non si pone
- accedo sempre ad una copia

Haskell (e Scheme)

Presentazione del paradigma attraverso un esempio concreto

- Haskell

Confronto con Scheme, funzionale ma con scelte diametralmente opposte

- Origini
  - Scheme: uno dei tanti dialetti Lisp (1958, Johh McCarthy)
    come Clojure, Common Lisp, Emacs Lisp, Standard Lisp, Racket
  - Haskell: ML (1973, David Milner, Edimburgo),
    come Standard ML, Caml, OCaml,

Haskell (e Scheme)

- Sintassi
  - Scheme: pochi costrutti, semplici
    a scapito della concisione del codice,
    tante parentesi
  - Haskell: non molti costrutti base,
    molto zucchero sintattico,
    programmi molto sintetici,
- Esempio, crivello di Eratostene in Haskell

```
primes = filterPrime [2..]
  where filterPrime (p:xs) =
          p : filterPrime [x | x <- xs, x `mod` p /= 0]
```

Haskell (e Scheme)

Sistema di tipi:

- Scheme: controllo di tipo dinamico
- Haskell: controllo statico
  - inferenza di tipo
- entrambi fortemente tipati

Haskell (e Scheme)

Meccanismo di valutazione:

- Scheme: linguaggio eager, call-by-value (passaggio per valore)
  - gli argomenti di una funzione vengono valutati prima di essere passati nel corpo,
  - valuto tutto appena possibile
- Haskell: lazy, call-by-need (passaggio per nome)
  - gli argomenti di una funzione vengono passati così come stanno
  - valuto un argomento se proprio non posso farne a meno
  - posso gestire strutture dati infiniti, stream

Confronto eager – lazy

- esistono espressioni che convergono con la valutazione lazy, e divergono nella eager
- ma non il viceversa
- sui tipi semplici, se convergono, convergono sullo stesso valore
- valutazione eager più semplice da implementare
- valutazione lazy, implementata in maniera semplice,
  porta a valutare lo stesso argomento molte volte con perdite di efficienza

Valutazione lazy.

- Vantaggi
  - evito lavoro inutile `fst (2, (fact 1000))`
  - più programmi terminano `fst (2, (diverge 0))` `diverge  x = diverge x`
  - più programmi non generano errori `fst (2, error)`
- Svantaggi
  - potenziale ripetizione delle esecuzioni
    - `(\x -> x + x) (fact 1000)`
    - lo si evita con il call-by-need, valuto argomenti replicati una volta sola
  - espressioni con side-effect complicate da gestire
    - side-effect modificano lo stato: memoria, I/0
    - se la valutazione di un argomento provoca un side effect, diventa difficile capire quando questo avviene
    - soluzione Haskell funzionale puro

Valori

In un linguaggio funzionale, soprattutto eager, è importante definire

- l'insieme dei valori le espressioni che si considerano essere completamente valutate
  in Scheme:
  - le costanti numeriche `1, 2, ...` sono valori,
    tutte le altre espressioni di tipo intero no
  - coppia `(e1, e2)` è un valore se e solo se le sue componenti, `e1`, `e2`, sono valori
  - le lambda astrazioni sono valori
    `(lambda (x) (+ 3 1))` funzione costante
    `(lambda () (+ 3 1))` funzione senza argomento, thunk
    - meccanismo per sospendere la valutazione
  - ...

Haskell (e Scheme)

- Purezza
  - Scheme: non è un linguaggio funzionale puro
    esistono effetti collaterali, posso modificare lo stato

```
(define b 1)
(define succ (lambda (x) (+ x b)))
(set! b 5)
```

  - Haskell puramente funzionale
    come (quasi) tutti i linguaggi lazy
    - la gestione dei side-effect nei linguaggi lazy più complessa,
      non è chiaro in quale istante un'espressione è valutata e quante volte
      problematico se la valutazione ha effetti collaterali

Haskell (e Scheme)

- in generale
  - in Haskell molti dei concetti di Scheme, ma sotto una veste diversa
  - Haskell più sofisticato, nuovi costrutti, meccanismi per definire programmi

Documentazione

- Sito haskell.org, dispone di tutte le informazioni
  - tutorial: A gentle introduction to Haskell 98 ,
    qualche discrepanza con la versione attuale Haskell2010,
    (sistema di tipi più ricco)
    non completamente retrocompatibile
  - download: ghc: Glasgow Haskell Compiler (linguaggio compilato)
    - ghci: un interprete Haskell, esecuzioni interattiva.

Valori e tipi

Tipi scalari:

- Numerici: varie classi di numeri

```
5 - 5  :: 5 :: Num t => t  --- generico tipo numerico
5.0 :: Fractional t => t  --- generico tipo frazionario
pi :: Floating a => a  --- generico tipo floating-point
```

sistemi di tipi più complesso rispetto a Haskell98, tutorial diverse “classi” di tipi numerici.

- Overloading, la giusta interpretazione è scelta dal contesto

```
(rem 7 4) :: Integral a => a  --- generico tipo intero
1 + 2  :: Num a => a
(1 + 2) + pi      --- accettato, a (1+2) associato un tipo
(rem 7 4) + pi    --- genera errore, Integral incompatibile
```

Sistema di inferenza dei tipi:

- non serve (quasi mai) dichiarare il tipo di un identificatore
- il compilatore (interprete) lo capisce dal contesto, in maniera piuttosto complessa.
  - algoritmo di inferenza di tipi
    cerca lo schema di tipo più generale
    associabile ad un'espressione
- `ghci` fornisce il tipo di un'espressione `e` con `:type e`

```
Prelude> :type (rem 7 4)
(rem 7 4) :: Integral a => a
```

Tipi scalari

- Caratteri (Unicode set)

```
'a'   :: Char
```

- Boolean

```
True  False  :: Bool
```

Tipi composti

- enuple di tipi diversi

```
('b', 5, pi) :: (Num t, Floating t1) => (Char, t, t1)
('b', ((5, pi), (1,2,3))) --- naturalmente posso iterare
```

- esistono distruttori ma solo per le coppie

```
fst (2,4)
snd (2,4)
fst (2,3,5)  --- genera errore di tipo
```

- le componenti di altre enuple selezionate per pattern matching

Liste

Sequenze di elementi dello stesso tipo:

```
[1,2,4] :: Num t => [t]
[1,2,pi] :: Floating t => [t]
[1,2,'a']  --- errore di tipo
['a','b','d'] == "abd"  --- :: stringhe come liste di car
```

- liste formate da due costruttori

```
[] :: [a]                  --- lista vuota, nil di Scheme
(:) :: a -> [a] -> [a] --- concatenazione, infisso, cons
1:2:4:[]   --- senza parentesi,  (:) associa a destra
(1:(2:(4:[])))   ----  posso aggiungere parentesi
1:2:4:[]  == [1,2,4]       --- zucchero sintattico
'a':'b':'c':[]  == "abc"  --- zucchero sintattico
```

Liste

- costruttori per liste di sequenze aritmetiche, presente in Python, e altri linguaggi

```
[1..9]      --- definizioni compatte
[1,3..20]   --- schema più sofisticato
            --- definisce una progressione aritmetica
```

- distruttori: `head`, `tail`, equivalente di `car`, `cdr`, ma con nomi accettabili

```
head [2,4,6]
tail [2,4,6]
head (tail [2,4,6])
```

- posso costruire liste di liste, ma tipi omogenei

```
[[1,2],[1,2,3],[1]] :: [[Integer]]
[[1,2],[1,2,3], 1 ] --- genera errore di tipo
```

Tipi definiti dall'utente

Meccanismo piuttosto sofisticato per definire un ricco insieme di tipi

- Tipi Enumerazione

```
data Colore = Rosso | Verde | Marrone
y = Rosso
```

- Haskell case sensitive,
  - nome dei tipi, costruttori, costanti: iniziano per maiuscola
  - nome variabili (normali o di tipo), funzioni: iniziano per minuscola

```
data Colore = rosso | Verde | Marrone  --- genera errore
data colore = Rosso | Verde | Marrone  --- genera errore
```

- tipo Bool enumerazione predefinito, nel modulo Prelude

```
data Bool = True | False
data NBool = True | False
```

- dichiarazioni multiple: non ammesse nello stesso ambiente
  possibili in un nuovo ambiente locale
  con l'interprete ogni riga di input genera un nuovo ambiente locale

Tipi: record

Tipi record, con costruttori

```
data IntPoint = IPt Integer Integer
IPt 3 6
```

- definisco un tipo con più componenti, alle singole componenti accedo in base alla posizione,
- mancano le etichette sulle componenti, ma posso introdurle con sintassi alternativa
- etichetto la struttura `IPt`

Tipi: union

Tipi unione, più alternative

```
data Point23Dim = Pt2 Integer Integer
                | Pt3 Integer Integer Integer
Pt2 1 2
Pt3 1 2 3
```

- definisco un elemento che può avere 2 o 3 componenti,
- più strutture alternative
- un costruttore per ogni alternativa

Tipi parametrici

- Tipi parametrici, un tipo che dipende da un altro tipo

```
data Point a = Pt a a
```

- `a` parametro, variabile di tipo
- `Pt` costruttore generico di tanti tipi diversi
- generic (parametrized) types in Java, implementano idee simili ma con tipi espliciti

```
Pt 2 3       :: Num a => Point a
Pt 'a' 'b'   :: Point Char
```

- `Point`: type constructor
- `Pt` : data constructor

Java Generic Classes

Tipi parametrici analoghi ai tipi generici in Java

```
class Point<T> {
   public T x, y; }
```

```
Point<String> stringPoint = new Point<>();
stringPoint.x = "Hello";
stringPoint.y = "World";
```

In Java necessario istanziare esplicitamente il parametro di tipo `<T>`, in Haskell no.

Name set

Posso anche definire:

```
data Point a = Point a a
Point 2 3 :: Point Integer
```

- uso lo stesso nome per due oggetti in categorie sintattiche differenti,
- name set diversi, il contesto dirime l'ambiguità

Enuple

Viste come caso particolare di tipo record parametrico

```
(3, 'a', ['b']) :: Num t => (t, Char, [Char])
```

- nota virgola per separare i campi,
- parentesi tonde, obbligatorie, con significato diverso dal solito

Equivalente alla definizione

```
data ( , , ) a b c = ( , , ) a b c
```

- più zucchero sintattico ad hoc.

Posso definire enuple di lunghezza arbitraria

- concettualmente: tanti costruttori
  - ognuno con un numero di argomenti differenti
  - con struttura simile

Tipi ricorsivi (parametrici)

Definizione ricorsive sono lecite

```
data Tree a   = Null | Node a (Tree a) (Tree a)
data List a   = Nil    | Cons  a (List a)

Node 3 Null (Node 5 Null Null) :: Tree Integer
Cons 'a' (Cons 'z' (Cons '8' Nil))   :: List Char
```

Definizione di un nuovo tipo T

- vengono definiti un insieme di costruttori
- costruttori: funzioni che restituiscono elementi di T
- di ogni costruttore viene definito il dominio, la lista degli argomenti
- definizioni parametriche rispetto ad uno o più tipi `a`, `b`
- definizioni ricorsive sono lecite

Tipi di dati ricorsivi in Rust

```
enum BinaryTree<T> {
    Null,
    Node {
        value: T,
        left: Box<BinaryTree<T>>,
        right: Box<BinaryTree<T>>,
    },
}
```

Differenze:

- etichette nelle componenti delle enuple,
  record al posto di enuple
- uso esplicito dei puntatori in `Box<BinaryTree<T>>`

Tipi di dato ricorsivi in Scheme.

Usando le liste (arbitrarie) di Scheme posso definire diversi modi per rappresentare dati di tipi ricorsivi

- un approccio canonico

```
(define  Null  (list 'LTree))
(define  (Branch a tl tr) (list 'BTree a tl tr))
(define  (leftSon t) (car (cdr t)))
(define  (BTree-? t) (eq? (car t) 'BTree))
```

- definisco
  - i costruttori `Null` `Branch`
  - i distruttori `leftSon` `rightSon`
  - funzioni di controllo `BTree`
- nessuna definizione di tipo o controllo di tipo
  - il programmatore usa uno schema canonico per definire gli oggetti
  - controlli a tempo di esecuzione

Tipi predefiniti come caso particolare

Tipi di dato predefiniti sono quasi tutti un istanza dello schema generale di definizione di tipo:

- Boolean: tipo di data predefinito maniera perfetta
- Enuple, Liste: predefiniti ma usano una sintassi ad hoc
- `Int`: seguono il pattern base, ma contengono troppi elementi per essere definibili in maniera standard
- `Float`: non sono tipi di dato ricorsivi, non sono ordinali

Equazioni di tipo, equivalenze tra tipi

- Posso dare un nome ad espressioni di tipo

```
type String = [Char]   --- predefinito
type Person = (Name,Address)
type Name   = String
data Address = None | Addr String

type IntTree = Tree Integer
type BinaryFunction a = a -> a -> a
type BinaryIntFunction = BinaryFunction Integer
```

- Equivalenza strutturale tra i tipi:
  - `[String]` e `[[Char]]` sono espressioni di tipo equivalenti.
  - come `Person -> Name` ,
    `(Name,Address) -> Name` ,
    `(Name,Address) -> [Char]` ,

Equivalenze tra tipi

Nota: tipi ricorsivi con nomi diversi, con stessa struttura, non sono equivalenti

```
data Point1 = Point1 Integer Integer
data Point2 = Point2 Integer Integer
```

usano, per i costruttori, nomi differenti

Variabili e binding

Posso associare espressioni a variabili

```
x = 5 + 3
```

- legame immutabile, identificatori (variabili, funzioni)
  non possono essere ridefinite
  se non in ambienti locali, mascheramento
  - o usando l'interprete: ogni interazione con l'interprete genera un nuovo ambiente locale
- legame lazy, per nome
  a `x` associo l'espressione `5 + 3` senza valutarla
- l'ordine non ha importanza

```
x = y + 3
y = 0
```

Variabili e binding

- possibili definizioni mutamente ricorsive

```
x = y + 3
y = x - 3
z = z + 1
```

- il programma diverge solo quando viene forzata la valutazione di `x` o `y` o `z`
  legame lazy

Ambiente locale

Le dichiarazioni

```
x = 5
succ x = x + 1
```

Definiscono legame immutabile,

- gli identificatori non posso essere ridefiniti,
- validi su tutto il programma.

Utile avere ambienti locali,

- variabili locali, funzioni ausiliare, per definire altre funzioni.

Due costruttori di ambienti locali

`let`

```
y = 5
let y = a + 3
    a = 5
in y + a
```

- `let` definisce un'espressione con ambiente locale
- mutua ricorsione
- nell'ambiente locale posso ridefinire le variabili

`where`

```
y = 2 + z
where z = x*x
```

- usata solo dopo una definizione
  valori ausiliari necessari per la definizione principale
- post-fisso, mutua ricorsione

Funzioni

Oggetti del primo ordine

- lambda astrazione, per costruire funzioni nameless

  ```
  \ x -> x + 1
  ```

  il simbolo \ ricorda la lettera greca lambda λ

- definizione di funzioni (associamo un identificatore ad una funzione)
  - due alternative

```
inc x = x + 1
inc = \ x -> x + 1 --- definizione equivalente
```

Pattern matching

- definizione per casi, si applica il primo caso lecito

```
fact 0 = 1
fact n = n * fact (n -1)

fib 0 = 0
fib 1 = 1
fib n = fib (n-1) + fib (n-2)

fib n = fst (fibAux n)
  where fibAux 0 = (0,1)
        fibAux n = (y, x + y)
          where (x, y) = fibAux(n-1)
```

Pattern matching presente anche in: Rust, Swift, F#, Scala, OCaML, Erlang

Currying

- da Haskell Curry,
- funzioni su più argomenti sono viste come funzioni che restituiscono funzioni
- isomorfismo tra `(A * B) -> C` e `A -> (B -> C)`
- currying significa passare dalla prima alla seconda rappresentazione dello spazio di funzioni

Esempio: definisco una funzione somma come
(tre definizioni equivalenti):

```
add  = \ x -> ( \ y -> (x + y ))
add  = \ x y -> x + y
add x y = x + y
```

Currying

il currying permette

- una gestione elegante di funzione a più argomenti, non serve costruire coppie di valori
- sintetizza la definizione di alcune funzioni

```
succ = add 1
succ = \x -> add 1 x
```

- per i nostalgici, la versione uncurryed è comunque possibile

```
uncurryedAdd  :: Num a => (a, a) -> a
uncurryedAdd (x, y) = x + y
dodici = uncurryedAdd (5,7)
```

- notare che le parentesi sono quelle dei tipi enupla, non quelle che racchiudono i parametri di una procedura

Regole sintattiche per evitare parentesi

- per applicare una funzione è sufficiente la giustapposizione
  `f x`
  - in linguaggi imperativi `f(x)`
  - in Scheme `(f x)`
    - notazione usabile in Haskell,
      dove posso inserire un numero arbitrario di parentesi forzano solo l'ordine di valutazione
- l'applicazione associa a sinistra
  - `add x y` abbreviazione per `(add x) y`
  - posso anche scrivere `(add x y)`, come in Scheme,
    o `((add x) y)`
- nelle espressioni di tipo, la freccia `->`, associa a destra
  ```
  add :: Integer -> Integer -> Integer
  ```
  abbreviazione per
  ```
  add :: Integer -> (Integer -> Integer)
  ```

Funzioni definite per casi (pattern matching)

- modo comodo e elegante per definizione chiare e sintetiche di funzioni
- zucchero sintattico, si può ridurre ad altri meccanismi base, costrutto `case`

```
head (x:xs) = x
tail (_:xs) = xs
```

- wildcard _, sostituisce le variabili nei pattern,
  - rende esplicito il non uso della variabile,
  - tutti i wildcard sono considerati variabili distinte

```
empty :: [a] -> Bool
empty (_:_) = False
empty []    = True
```

Esempi

```haskell
length :: [a] -> Integer
length [] = 0
length (_:xs) = 1 + length(xs)

map :: (a->b) -> [a] -> [b]
map _ []     = []
map f (x:xs)  = f x : map f xs

squares = map (\x -> x * x) [1..10]
```

Cosa contiene `map add [1..10]`?

Alcuni funzionali standard

- curry: trasforma una funzione binaria nella sua versione curryficata

```
curry  :: ((a, b) -> c) -> a -> b -> c
curry  =  \ f -> \ x -> \ y ->  f (x, y)
curry f =  \ x y ->  f (x, y)
curry f x y  =  f (x, y)
```

- operazione inversa

Alcuni funzionali standard

- curry: trasforma una funzione binaria nella sua versione curryficata

```
curry  :: ((a, b) -> c) -> a -> b -> c
curry  =  \ f -> \ x -> \ y ->  f (x, y)
curry f =  \ x y ->  f (x, y)
curry f x y  =  f (x, y)
```

- operazione inversa

```
uncurry  :: (a -> b -> c) -> (a, b) -> c
uncurry f = \ (x, y) -> f x y
uncurry f (x, y) =  f x y
```

- compose, composizione di due funzioni

Alcuni funzionali standard

- curry: trasforma una funzione binaria nella sua versione curryficata

```
curry  :: ((a, b) -> c) -> a -> b -> c
curry  =  \ f -> \ x -> \ y ->  f (x, y)
curry f =  \ x y ->  f (x, y)
curry f x y  =  f (x, y)
```

- operazione inversa

```
uncurry  :: (a -> b -> c) -> (a, b) -> c
uncurry f = \ (x, y) -> f x y
uncurry f (x, y) =  f x y
```

- compose, composizione di due funzioni

```
compose :: (b -> c) -> (a -> b) -> a -> c
compose f g = \ x -> f ( g x )
compose f g x = f ( g x )
```

predefinita `.` in notazione infissa `f . g`

Meccanismo di valutazione, passaggio dei parametri

Valutazione lazy, call-by-need

- argomenti di funzioni e valori associati a variabili, non vengono valutati, al momento del passaggio dei parametri, definizione, si passa la loro closure (espressione, ambiente di valutazione)
- valutazione avviene all'interno del corpo, se necessario

La definizione

```
v = head []
```

- associa a `v` l'espressione `head []`
- nessun errore fino a che si forzo la valutazione di `v`
- esempio scrivo, nell'interprete, `v` o `if head [] then 0 else 1`
  - `if head [] then 0 else 1` viene passato come argomento ad una funzione `show` che determina la stringa della sua rappresentazione
  - i singoli caratteri di `show (if head[] then 0 else 1)` vengono valutati e stampati

Dati lazy

- la valutazione differita, anche per i costruttori di dato, permette di definire dati potenzialmente infiniti,
- di volta in volta viene valutata solo la parte richiesta dal resto del codice
  per esempio, per applicare pattern matching

```
ones = 1 : ones :: Num a => [a]
```

- definizione ricorsiva,
- viene espansa solo quando necessario, per esempio esamino il secondo elemento di `ones`

```
head(tail(tail ones))
```

Costruzione della lista di tutti i naturali

```
numsFrom n = n : numsFrom (n + 1)
nums = numsFrom 0
```

Dati lazy

Costruzione della lista dei quadrati

```
squares = map (\x -> x^2) (numsFrom 0)
```

La sequenza di Fibonacci, vista come stream,

```
addList (x:xs)(y:ys) = (x + y) : addList xs ys

fib = 0:(addList fib (1 : fib))
```

- calcolata in maniera efficiente grazie alla meccanismo call-by-need, `fib` replicata ma valutata una volta sola
- corretto perché la somma della sequenza di Fibonacci con la sua traslata, di una posizione a destra, restituisce la sequenza di Fibonacci dal secondo elemento in poi (correttezza non ovvia)

Estrarre parte finite da dati lazy

- funzione che seleziona la parte iniziale finita (funzione predefinita nel `Prelude`)

```
take 0  _ = []
take _ [] = []
take n (x:xs) = x : take (n-1) xs
```

- utile per interagire con l'interprete `ghci`
  - quando scrivo `exp` l'interprete forza la valutazione completa di `show exp`:
    - `exp` viene convertito in una stringa funzione `show`
    - ogni elemento della stringa viene stampato
  - se inserisco `ones` stampa la sequenza infinita di `1`
- funzione per selezionare l'iesimo elemento di uno stream

```
takeEl 0 (x:_)  = x
takeEl n (_:xs) = takeEl (n-1) xs
```

Stream in linguaggi funzionali eager

Attraverso l'uso di thunk posso rappresentare strutture dati infinite in linguaggi eager.

Gli esempi precedenti tradotti in Scheme come:

```
(define (numsFrom n) (lambda () (cons n (numsFrom (+ n 1)))))

(define nums (numsFrom 0))

(define (take n xs)
  (cond
    [(equal? n 0) null]
    [(equal? (xs) null) null]
    [true (cons (car (xs)) (take (- n 1) (cdr (xs))))]))

(take 20 nums)
```

Stream in Scheme

La funzione `map` sugli stream di Scheme diventa:

```
(define (lazymap f xs)
    (if (equal? (xs) null)
        xs
        (lambda () (cons (f (car (xs)))
                         (lazymap f (cdr (xs)))))))

(take 20 (lazymap (lambda (x) (* x x)) nums))
```

Sintassi infissa

- Diverse funzioni predefinite usano la sintassi infissa

  `+  *  :  ^  -`

- ne esisto altre:
  - ++ concatenazione di stringhe
  - `.` composizione di funzioni `f . g = \ x -> f ( g x)`
- possibile definire operatori con notazione infissa: non identificatori standard es `%`, `\\`, definiti come

```
(%) a b = rem a b
(\\) a b = a + b
```

- possibile specificare tipo di associatività e priorità

```
infixl 9 %    --- infisso, assoc. a sinistra, priorità 9
infixr 5 \\   --- infisso, assoc. a destra, priorità 5
7  % 4 % 3 \\ 2 \\ 5  ---  ((7  % 4) % 3) \\ (2 \\ 5)
```

Passaggio tra notazioni infissa – prefissa

Le parentesi `( )` permettono di passare alla notazione prefissa

```
(+) :: Num a => a -> a -> a
```

- `(+)` coincide con le funzione `\ x y -> x + y`

inoltre

- `(+ 4)` è zucchero sintattico per `\ x -> x + 4`
- `(5 +)` è zucchero sintattico per `\ y -> y + 5`

Gli apici permettono la trasformazione opposta:
scrivere una funzione binaria in forma infissa

```
5 `add` 4
```

- chiave di lettura: c'è uno scambio di posizione tra `funzione` e `primo_argomento`

```
add3Values x y z = x + y + z  :: Num a => a -> a -> a -> a
sei = (1 `add3Values` 2) 3
```

List comprehension

- liste sono pervasive di Haskell, utile avere zucchero sintattico

```
[ f x | x <- xs ]
```

applico la funzione `f` a tutti gli elementi della lista xs,

si richiama una notazione insiemistica

```
[ x + 1 | x <- [1..6] ]
map (+1) [1..6]
```

La parte `x <- xs` viene detta generatore,

possibili più generatori, si prendono tutte le combinazioni

```
[  (x * y) | x <- [1..10], y <- [1..10] ]
[[  (x * y) | x <- [1..10]] | y <- [1..10] ]
```

posso introdurre guardie, espressioni boolean per filtrare

```
[ (x * y) | x <- [1..10], y <- [1..10], (mod (x*y) 2) == 1 ]
```

List comprehesion in altri linguaggi

Disponibile anche in altri linguaggi: Python, Scala, Julia, Erlang con una sintassi leggermente diversa:

Esempio Python:

```
even_squares = [x**2 for x in range(10) if x % 2 == 0]
```

Quicksort

Esempio uso list comprehension:

```
quickSort [] = []
quickSort (x:xs) =
    quickSort[ y | y <- xs, y < x] ++
    (x : quickSort[ y | y <- xs, x <= y])

quickSort ([3,7..40]++[2,5..30])
quickSort "Hello World"
```

- stringhe liste di caratteri
- sui caratteri esiste una relazione d'ordine

  ```
  quickSort :: Ord a => [a] -> [a]
  ```

- Haskell ha un meccanismo di typeclass, parente delle interface di Java che permette un più sofisticato polimorfismo parametrico

Funzioni di base e Prelude

Haskell, attraverso il modulo precaricato Prelude, mette disposizione:

- le classiche operazioni aritmetiche e logiche, con usuale notazione infissa, implementate in linguaggio macchina,

```
+  - *  /   ||   &&  <  >  <=  >=  ==  /=  ...
```

- una serie funzioni analitiche, implementazione interna

```
sin  cos tan  exp ...
```

- funzioni di I/O
- funzioni Haskell predefinite su liste, numeri

```
head  tail  take  sum  mcd  lcd  max
```

Documentazione

per le funzioni in Prelude

- più esplicativa “A tour of Prelude”

https://www.cse.chalmers.se/edu/year/2018/course/TDA452/tourofprelude.html

- più completa: tramite Hackage,

http://hackage.haskell.org/package/base-4.11.0.0/docs/Prelude.html

- in generale una Hackage offre una panoramica dei package, librerie, disponibile per Haskell

Esercizi

reverse: invertire un stringa

- semplice ma poco efficiente
- accumulatore e ricorsione di coda
  `reverseAux xs ys` coincide con `(reverse xs) ++ ys`
- usando la foldl o foldr

Esercizi

reverse: invertire un stringa

- semplice ma poco efficiente
- accumulatore e ricorsione di coda
  `reverseAux xs ys` coincide con `(reverse xs) ++ ys`
- usando la foldl o foldr

```
reverse xs = reverseAux xs []
   where reverseAux [] ys  = ys
         reverseAux (x:xs) ys  = reverseAux xs (x:ys)
```

Fold left

Definire fold left, tipo

```
foldl :: (b -> a -> b) -> b -> [a] -> b
```

`foldl f z l`, usando come valore iniziale `z`,
applica `f` a tutti gli elementi della lista da sinistra a destra, ossia:

```
foldl f z [a1, a2, ... , an] = f ( ... (f ( f z a1 ) a2) ... )
```

Fold left

Definire fold left, tipo

```
foldl :: (b -> a -> b) -> b -> [a] -> b
```

`foldl f z l`, usando come valore iniziale `z`,
applica `f` a tutti gli elementi della lista da sinistra a destra, ossia:

```
foldl f z [a1, a2, ... , an] = f ( ... (f ( f z a1 ) a2) ... )
```

```
foldl f z []     = z
foldl f z (x:xs) = foldl f (f z x) xs
```

Definire reverse da foldl

Fold left

Definire fold left, tipo

```
foldl :: (b -> a -> b) -> b -> [a] -> b
```

`foldl f z l`, usando come valore iniziale `z`,
applica `f` a tutti gli elementi della lista da sinistra a destra, ossia:

```
foldl f z [a1, a2, ... , an] = f ( ... (f ( f z a1 ) a2) ... )
```

```
foldl f z []     = z
foldl f z (x:xs) = foldl f (f z x) xs
```

Definire reverse da foldl

```
reverse xs = foldl (\ys y -> (y:ys)) [] xs
```

alternativamente

```
reverse xs = foldl (\ys -> \y -> (y:ys)) [] xs
reverse xs = foldl (\ys -> (:ys)) [] xs
```

Fold right

Definire fold right, tipo

```
foldr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b
```

come `foldl` ma in ordine opposto, si parte dall'ultimo elemento della lista ossia:

```
foldr f z [a1, a2, ... , an] = f a1 (f a2 ... ( f an z ) ... )
```

Fold right

Definire fold right, tipo

```
foldr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b
```

come `foldl` ma in ordine opposto, si parte dall'ultimo elemento della lista ossia:

```
foldr f z [a1, a2, ... , an] = f a1 (f a2 ... ( f an z ) ... )
```

```
foldr f z []     = z
foldr f z (x:xs) = f x (foldr f z xs)
```

Definere reverse con foldr

```
reverse xs = foldr (\ y ys -> (ys ++ [y])) [] xs
```

Pattern matching

Come vengono interpretate, eseguite le definizioni per pattern matching?

```
take 0   _ = []
take _ [] = []
take n (x:xs) = x : take (n-1) xs
```

zucchero sintattico per un costrutto case sull'enupla degli argomenti

```
take n xs =  case (n, xs) of
               (0,   _) -> []
               (_, []) ->  []
               (n, (y:ys)) ->  y : take (n-1) ys
```

Case – definizione per casi

Haskell permette definizione per casi `case` che considerano più valori contemporaneamente

Possono essere visti come zucchero sintattico per una serie di case sulle singole componenti

```
take n xs =  case n of
               0 -> []
               _ -> case xs of
                      [] -> []
                      (y:ys) ->  y : take (n-1) ys
```

- le definizioni per pattern matching rendo il codice più leggibile
- permettono di scrivere in maniera sintetica, chiara, un insieme costrutti case annidati tra loro

Case singolo

Come viene eseguito un case? Es.

```
case x of
   [] ->
   y: ys ->
```

forza la valutazione dell'argomento `x`, passaggio per nome, alle variabili associo closure (espressioni, environment)

come avviene la valutazione di x?

Valutazione dell'argomento del case

dipende dal tipo di x

- x scalare, viene valutato completamente
  il suo valore comparato con quello dei casi
- x tipo `data`
  - viene valutato fino a determinare il suo costruttore
    - es. tipo `Tree Null` o `Branch x t1 t2`
    - valutazione lazy, si valuta lo stretto necessario,
      le componenti restano espressioni (closure)
  - i rami di case marcati con i costruttori

```
data Tree    = Null | Branch a (Tree a) (Tree a)
height = \ t -> case t of
    Null n -> 0
    Branch t1 t2 -> max (height t1) (height t2) + 1
```

- possibili definizioni non esaustive (non tutti i casi considerati),
- casi non previsti generano errori a run-time.

Pattern matching, risultati per un pattern

- i pattern possono essere piuttosto complessi
- dato un pattern (es. `x : 0 : xs`) ed un'espressione `e` la valutazione del pattern su `e` può
  - fallire, l'espressione valutata non rispetta il pattern, (es. se `e` diventa `3:1:e2` o se diventa `4:[]`)
  - avere successo, es. `e` riduce `5:0:e1`
    - in questo caso
      `x` viene legata a `5`
      `xs` alla closure `e1`
  - divergere (o generare errore), la computazione non produce sufficienti risultati (es. `e` riduce a `1:e3`, e la valutazione di `e3` diverge)

Sintassi

- cosa posso inserire in un espressioni pattern, es `3:x:y:[]`
  - costanti
  - costruttori
  - variabili
    - non possono essere ripetute, es. `x:x:xs`
    - considerate nuove, variabili locali del pattern, nessun collegamento con variabili preesistenti

```
x = 10
take 0   _ = []
take n (x:xs) = x : take (n-1) xs
```

    - wildcard: caso particolare di variabile, rimarco il disinteresse per il valore istanziato

Ordine di valutazione

Come viene forza la valutazione degli argomenti

- in base all'ordine di scritture delle regole, dalla prima all'ultima
- sulla singola regole, i pattern vengono testati da sinistra a destra
  - se un pattern fallisce: passo alla regola successiva
  - se un pattern diverge, la computazione diverge
  - se un (la sequenza di) pattern ha successo
    si valuta il corpo, con i legami creati dal pattern

Ordine di valutazione

Esempio: le seguenti definizioni:

```
take 0   _ = []
take _ [] = []
take n (x:xs) = x : take (n-1) xs
```

e

```
take _ [] = []
take 0   _ = []
take n (x:xs) = x : take (n-1) xs
```

non sono equivalenti

Quando possono dare risultati differenti?

Pattern con guardie

Ai pattern posso far seguire una lista di guardie

- espressioni booleane
- esaminate dalla prima all'ultima, se il pattern ha successo
- se una guardia valuta `True`, valuto il corpo corrispondente
- se una guardia valuta `False`, si passa alla successiva
- se tutte `False`, il pattern fallisce e si passa al successivo

```
sign x | x > 0  = 1
       | x == 0 = 0
       | x < 0  = -1
```

- posso usare le guardia anche con il costrutto `case`

```
sign x = case x  of
           y | y > 0  -> 1
             | y == 0 -> 0
```

Guardie: meccanismo generale di programmazione

If then else

Posso usare il costrutto

```
if b then e1 else e2
```

equivalente a

```
case b of
    True -> e1
    False -> e2
```

Forma generale del pattern con guardia

Definizione per pattern matching

```
funName pattern1 | guardia11 = exp11
                 | ...
                 | guardia1n = exp1n
funName pattern2 | guardia21 = exp21
                 | ..
                 | guardia2m = exp2m
funName pattern3 ...
          ...
```

Forma generale del pattern con guardia

Posso usare le guardie anche col costrutto case

```
case exp of
    pattern1 | guardia11 -> exp11
             | ...
             | guardia1n -> exp1n
    pattern2 | guardia21 -> exp21
             | ..
             | guardia2m -> exp2m
    pattern3 ...
      ...
```

Esempio:

Calcolare la somma dei numeri pari di una lista, definizione per pattern matching.

Esempio:

Calcolare la somma dei numeri pari di una lista, definizione per pattern matching.

```
sommaPari [] = 0
sommaPari (x:xs) | (mod x 2) == 0 = x + sommaPari xs
                 | otherwise      = sommaPari xs
```

Calcolare la somma dei numeri dispari di una lista, definizione via case

Esempio:

Calcolare la somma dei numeri pari di una lista, definizione per pattern matching.

```
sommaPari [] = 0
sommaPari (x:xs) | (mod x 2) == 0 = x + sommaPari xs
                 | otherwise      = sommaPari xs
```

Calcolare la somma dei numeri dispari di una lista, definizione via case

```
sommaDispari = \ ys ->
  case ys of [] ->  0
             (x:xs) | (mod x 2) == 0 -> sommaDispari xs
                    | True           -> x + sommaDispari xs
```

Layout

Separatori e blocchi possono essere usati esplicitamente (come in Python)

```
z = let x = 5 + y
        y = 6
    in x + y
```

può essere scritto con blocco e separazione delle dichiarazioni espliciti

```
z = let { x = 5 + y; y = 6 } in x + y
```

Una tabulazione imprecisa a porta a errori di compilazione. Es:

```
z = let x = 5 + y
         y = 6
    in x + y
```

- in questi casi i messaggi di errore del compilatore possono essere poco chiari: non si evidenzia l'errore di tabulazione

Record con campi etichettati

Le componenti di un data type sono identificate dalla loro posizione

```
data Point = Pt Float Float
p = Pt 3 4
```

Posso accedere alle componenti per pattern-matching

```
xCoord (Pt x _) = x
```

Alternativamente, come nei record, posso accedere alle componenti attraverso etichette field labels

```
data Point = Pt {xCoord, yCoord :: Float}
```

Record

```
data Point = Pt {xCoord, yCoord :: Float}
p = Pt{ xCoord = 3, yCoord =5}
a = xCoord p
q = p{ xCoord = 5}
a2 = xCoord p
b = xCoord q
p2 = Pt 3 4
```

- attraverso le etichette specifico le componenti di un nuovo Pt
- le etichette diventa funzioni per accedere alle componenti (distruttrici) `xCoord :: Pt -> Float`
- posso definire un nuovo punto `q`, a partire da uno esistente `p`, modificando solo alcune campi, gli altri vengono copiati.

Record

Una stessa etichetta può essere utilizzata da più costruttori.

```
data Point23 = Pt2 {xCoord, yCoord :: Float}
             | Pt3 {xCoord, yCoord, zCoord :: Float}
```

Etichette con tipi union rendono possibili errori di tipo rilevabili solo a run time,

- la dichiarazione seguente accettata,

```
p = Pt2{xCoord = 3, yCoord = 5}
a = zCoord p
```

- genera errore solo se si valuta `a`.

Esercizi

Definire `sommaPari` e `map` usando più “idiomi”, metodi di scrittura

- pattern matching
- costrutto case
- ricorsione di coda
- via foldl
- via foldr

Esercizi

Definire tipo di dato albero binario, `BTree` con tutti i nodi etichettati,

Definire le seguenti funzioni sui BTree

- `sumBTree`
- `depthBTree`
- `takeDepthBTree`

Definire le seguenti funzioni su alberi binari di ricerca, BST

- insert
- search
- toList

Ordinare una lista usano i BST.

Polimorfismo in Haskell

Nella versione semplice il polimorfismo parametrico

- usa espressioni di tipo con variabili (parametri) per descrivere il comportamento di programmi.
  Esempio:

```
map _ []     = []
map f (x:xs) = f x : map f xs
```

- `map :: (a->b) -> [a] -> [b]`
- tipo derivato mediante un algoritmo di inferenza di tipo
  - associa a `map` in suo tipo parametrico più generale,
  - tutti gli altri possibili tipi per `map`,
    es `(a->a) -> [a] -> [a]` oppure `(Char->b) -> [Char] -> [b]`
    ottenibili per istanziazione del tipo più generale
- esempio di derivazione di tipi per `map` ...

Polimorfismo parametrico

```
map :: (a->b) -> [a] -> [b]
```

- istanziando variabili di tipo si descrivono le varie applicazioni di `map`. Esempio in

```
squares = map (\x -> x * x) [1..10]
```

il tipo di `map` istanziato al tipo

```
(Integer -> Integer) -> [Integer] -> [Integer]
```

Estensioni del polimorfismo parametrico

Esistono funzioni polimorfe non descrivibili in questo modo. Esempio

```
quickSort [] = []
quickSort (x:xs) = quickSort[ y | y <- xs, y < x]
                        ++ x : quickSort[ y | y <- xs, x <= y]
```

ha tipo `Ord a => [a] -> [a]`

`quickSort` applicabile ad una lista generica, `[a]`,
a condizioni che i suoi elementi,

- possano essere applicate le funzioni `<` `<=`
- condizione espressa mediante la condizione `Ord a`:
  il tipo `a` appartenete alla typeclass `Ord`

Overloading

Affinché `quickSort` sia polimorfa bisogna:

- permettere che le funzioni < <= appartengano a più tipi
  - eventualmente con implementazione diverse, più metodi, codici, per confrontare oggetti
- ossia: permettere il polimorfismo di overloading

Mostreremo dichiarazioni per:

- specificare insiemi di tipi, typeclass, (esempio `Ord`) con un insieme di funzioni associate
- specificare che un tipo appartiene ad una typeclass (esempio `Char` appartiene a `Ord`)

Typeclass - dichiarazioni e istanziazioni

Le typeclass definiscono specifiche per tipi di dato
richiedono che un tipo possegga alcune funzioni, chiamate metodi.

```
class Eq a where
  (==)   ::  a -> a -> Bool
```

- Un tipo `T` per appartenere alla typeclass `Eq` deve avere una funzione == (usata in notazione infissa).

Inserimento di un tipo di una typeclass,

- devo essere fatto esplicitamente
- fornendo un'implementazione per i metodi della typeclass

```
instance Eq Integer where
  x == y    =  integerEq x y
```

Uso delle typeclass

- Alla funzione polimorfa

```
elem x []  = False
elem x (y:ys) = x == y || (elem x ys)
```

```
viene associato tipo
```

```
elem :: (Eq a) => a -> [a] -> Bool
```

- il simbolo => da intendersi come implicazione logica:
  - se la condizione (constraint) `Eq a` è soddisfatto (il tipo `a` appartiene alla typeclass `Eq`)
  - allora `elem` ha tipo `a -> [a] -> Bool`.

Implementazione di default dei metodi

La “vera” definizione di `Eq`, typeclass predefinita in Prelude,

```
class Eq a where
  (==), (/=)    ::  a -> a -> Bool
  x /= y        = not (x == y)
  x == y        = not (x /= y)
```

- viene fornita una implementazione di default per alcuni metodi, spesso basata sugli altri metodi,
- nelle definizioni `instance`
  - posso definire tutti i metodi, oppure
  - posss definirne solo alcuni e sfruttare le implementazioni default per gli altri
- nella specifica di una typeclass si definisce anche una lista di definizioni minimali

Implementazione di default dei metodi

```
instance Eq Integer where
  x == y     =  integerEq x y
  x \= y     =  False
```

oppure

```
instance Eq Integer where
  x == y     =  integerEq x y
```

oppure

```
instance Eq Integer where
  x \= y     =  False
```

- definizione semanticamente scorrette accettate da Haskell,
- a livello di documentazione, nei package, vengono specificate le uguaglianze attese ma Haskell controlla solo:
  - il tipo dei metodi
  - che i metodi forniti sia sufficienti a determinare tutti gli altri

Definizione di instance polimorfe

```
instance (Eq a) => Eq (Tree a) where
  Null             == Null           =  True
  Branch x1 tl1 tr1 == Branch x2 tl2 tr2 = x1==x2 && tl1==tl2
  _                 == _                = False
```

- per definire l'equivalenza su alberi,
  serve l'equivalenza sugli elementi base, ossia
- sotto la condizione `Eq a` posso dichiarare `Eq (Tree a)`
- nella definizione delle metodo == su `Tree a` uso:
  - `x1 == x2` definita da `Eq a`
  - `tl1 == tl2` chiamata ricorsiva

deriving

Istanziazione automatica

Alcune definizioni di metodi, necessari per inserire un tipo in una typeclass
uniformi su costruttori di tipo differenti,
possono essere create automaticamente da Haskell
usando `deriving` nella definizione di tipo

```
data Tree a = Null | Branch a (Tree a) (Tree a)
 deriving (Eq)
```

Relazione di sub-typeclass

- Posso dichiarare una typeclass sub-typeclass (estensione) di un altra

```
class (Eq a) => Ord a where
  (<), (<=), (>), (>=)  :: a -> a -> Bool
  min, max              :: a -> a -> a
  x <= y     = x < y || x == y
  ...
```

- `Ord` è sub-typeclass di `Eq` `Eq` è super-typeclass di `Ord`
- dichiara che la typeclass `Ord` possiede tutti i metodi della typeclass `Eq`, quindi == e \=
- nel definire tipo instance di `Ord` devo fornire anche in metodi di `Eq`
- ogni tipo `T` instance di `Ord` è instance di `Eq`

Sottoclassi multiple

- Posso definire un tipo sub-typeclass di più typeclass

```
class (Eq a, Show a) => EqAndShow a where
  ...
```

- In tipo instance di `EqAndShow` deve possedere i metodi delle due sottoclassi `Eq` e `Show`
  più eventuali metodi aggiuntivi

Visibilità dei nomi

- typeclass e metodi definiti a livello globale,
  visibili in tutto il programma
- uno stesso nome di metodo non può essere dichiarato su più typeclass
- metodi comuni possibile solo attraverso la definizione di sub-typeclass
- metodi, funzioni sono nello stesso name space
  - non posso usare lo stesso nome per un metodo ed una funzione

Typeclasses e Interfaces.

Pur con alcune differenze, possiamo paragonare Type Java.

Haskell	Java
Types	Classes
Typeclasses	Interfaces
Elementi	Oggetti
`instance Schema Type`	`class Type implements Schema {...}`
Polimorfismo parametrico con typeclass	Tipi generici con relazione di sottotipo

Relazioni con i linguaggi OO.

Naturalmente Haskell non OO, quindi una lunga serie di differenze

- i metodi non sono collegati agli oggetti, non si usa la sintassi `object.method`
- nessun mascheramento, stato nascosto (nomi privati, pubblici)
- non c'è ereditarietà, ma vengono definite implementazioni di default

Una catalogazione delle espressioni Haskell

- Espressioni semplici,

```
5 + 2
\ x -> x + 1
```

- Espressioni di tipo,

```
Integer
Integer -> Integer
```

- costruttori di tipo,

```
data Tree a  = Null | Branch a (Tree a) (Tree a)
data BTree a b  = LLeaf a | BBranch b (BTree a b) (BTree a b)
```

- typeclass, proprietà di tipi

```
Eq
Ord
```

Kind

Struttura piuttosto complessa:

- necessario mettere ordine
- nozione di `kind`
- estensione della nozione di tipo, applicabile ad espressione che non sono elementi e non hanno tipo (tipi, costruttori di tipo, typeclass)
- ai vari identificatori associa un etichetta che indica a che categoria appartengono
- kind dedotto dal compilatore,
  possile interrogare l'interprete per sapere il kind associato ad un espressione

Kind

- alle espressioni semplici associ un tipo

```
λ> :type (+1)
(+1) :: Num a => a -> a
```

- a tipi, il kind $*$,

```
λ> :kind Integer -> Integer
Integer -> Integer :: *
```

Kind

- ai costruttori di tipo, kind più complessi,
  esprimono il fatto di essere funzioni da tipo a tipo

```
data Tree a  = Null | Branch a (Tree a) (Tree a)
data BTree a b  = LLeaf a | BBranch b (BTree a b) (BTree a b)
λ> :kind Tree
Tree :: * -> *
λ> :kind BTree
BTree :: * -> * -> *
λ> :kind (->)
(->) :: * -> * -> *
λ> :kind (->) Integer
(->) Integer :: * -> *
```

Kind

- alle typeclass, proprietà di tipi

```
λ> :kind Eq
Eq :: * -> Constraint
λ> :kind Functor
Functor :: (* -> *) -> Constraint
```

valutazione dei `kind` fatta dal compilatore,
un type checking di secondo livello

Costruttori di tipo e typeclass predefinite

In Prelude

https://hackage.haskell.org/package/base-4.6.0.1/docs/Prelude.html

vengono definite

- un insieme di typeclass
  - ricca relazione di sub-typeclass
  - principalmente ordini e numeriche
- tipi, costruttori di tipo, definiti anche come istanze delle opportune typeclass,

Costruttori di tipo canonici, Maybe

- Maybe: serve a rappresentare eccezioni, errori

```
data Maybe a = Nothing | Just a
```

```
- `Nothing` eccezione
- `Just 5` computazione corretta
```

- Esempio di uso

```
myhead :: [a] -> Maybe a
myhead []     = Nothing
myhead (x:xs) = Just x
```

Costruttori di tipo canonici, Either

- Either, unione di due tipi

```
data Either a b = Left a | Right b
```

Esempi di typeclasss - Functor

```
class Functor f where
  fmap :: (a -> b) -> f a -> f b
```

- Functor non definisce un vincolo sui tipi ma sui costruttori di tipo
- Esempio, il costruttore di lista

```
instance Functor [] where
  fmap = map
```

Functor

- Maybe è un funtore

```
instance Functor Maybe where
  fmap f Nothing = Nothing
  fmap f (Just x)  = Just (f x)
```

- `Either` non è un instance of `Functor` (kind non corretto) `Either ()` si.

Ugualianze attese

- ci si aspetta che le seguenti regole siano soddisfatte

```
fmap id  ==  id
fmap (f . g)  ==  fmap f . fmap g
```

Typeclass numeriche

- Haskell ha un ricco insieme di tipi numerici, ereditato da Scheme
  - interi (dimensione fissa `Int` e arbitraria `Integer`)
  - frazionari (coppie di interi)
  - floating point (precisione singoli e doppie)
  - complessi (coppie di floating point)
- Catalogato con un ricco insieme di typeclass.

Typeclass numeriche

- `Num` typeclass più generale,

  non sub-typeclass di `Ord` perché i complessi non sono ordinati

```
class (Eq a) => Num a where
(+), (-), (*)  :: a -> a -> a
negate, abs    :: a -> a
fromInteger    :: Integer -> a
```

- `Real` la typeclass più generale di numeri ordinati

```
class (Num a, Ord a) => Real a where
  toRational :: a -> Rational
```

Typeclass numeriche

- `Real` non possiede la divisione, le sue sub-typeclass si dividono per il tipo di divisione
- `Integral` numeri con la divisione intera (modulo e resto)

```
class (Real a, Enum a) => Integral a where
quot, rem   :: a -> a -> a
-- arrotonda verso 0
-- (x `quot` y)*y + (x `rem` y) == x
div, mod    :: a -> a -> a
-- arrotonda al numero più piccolo
-- (x `div` y)*y + (x `mod` y) == x
toInteger   :: a -> Integer
```

Typeclass numeriche

- `Fractional` numeri con divisione senza resto

```
class Num a => Fractional a where
  (/)          :: a -> a -> a
  recip        :: a -> a
  fromRational :: Rational -> a
```

Typeclass numeriche

- Floating fornisce le funzioni analitiche

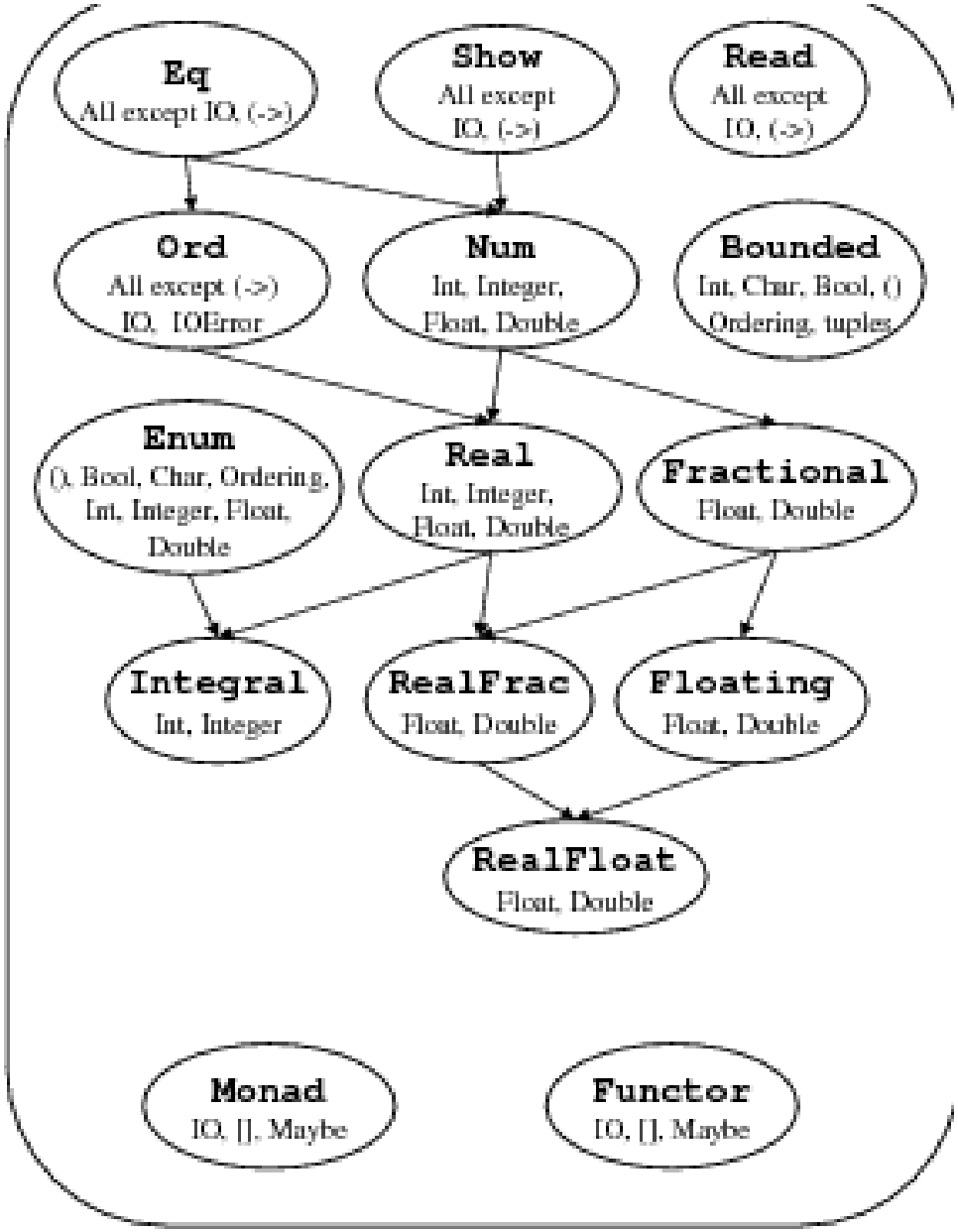
```
class Fractional a => Floating a
```

- RealFrac fornisce funzioni di arrotondamento (all'intero più vicino)

```
class (Real a, Fractional a) => RealFrac a
```

- con le relative istanze di tipo `Integer`, `Double`, `Float`, `Int32`, `Natural`
  - `Num` conta una 40ina di possibili istanze

Schema


Eq
All except IO, (->)
Show
All except IO, (->)
Read
All except IO, (->)
Ord
All except (->) IO, IOError
Num
Int, Integer, Float, Double
Bounded
Int, Char, Bool, () Ordering, tuples
Enum
(), Bool, Char, Ordering, Int, Integer, Float, Double
Real
Int, Integer, Float, Double
Fractional
Float, Double
Integral
Int, Integer
RealFrac
Float, Double
Floating
Float, Double
RealFloat
Float, Double
Monad
IO, [], Maybe
Functor
IO, [], Maybe

Overloading di tutti gli identificatori, nessuna coercion

- con l'overloading dei simboli una singola espressione può avere tipi diversi

```
(1 + 2) + pi   --- accettato, a (1+2) typeclass Num
               --- 1 2 interpretati come floating point
```

- ma per passare da un tipo numerico all'altro devo esplicitare nel codice la conversione

```
(rem 7 4) + pi    --- errore, (rem 7 4) ha typeclas Integral
                  --- incompatibile con Floating
fromIntegral (rem 7 4) + pi  --- accettato
```

- bisogna definire un tipo di default per valutare espressioni numeriche come `1+2` (Integer)
- possibile forzare il tipo con dichiarazioni di tipo

```
x :: Int
x = 1 + 2
```

Casting esplicito

- un insieme di funzioni definite nelle classi numeriche (polimorfismo ad hoc) permettono la conversione di tipo:

```
fromIntegral :: (Num b, Integral a) => a -> b
fromInteger :: Num a => Integer -> a
realToFrac:: (Real a, Fractional b) => a -> b
fromRational :: Fractional a => Rational -> a
...
ceiling  :: (RealFrac a, Integral b) => a -> b
floor    :: (RealFrac a, Integral b) => a -> b
truncate :: (RealFrac a, Integral b) => a -> b
round    :: (RealFrac a, Integral b) => a -> b
```

I/O Pragmatica

Nell'uso pratico `IO` haskell non troppo complesso

- definisco un identificatore `main` di tipi `IO ()`
  entry point del programma
- codice di `main` simile ad una sequenza di comandi
  - istanziano variabili, leggendo dati da input
  - chiamano funzioni per valutare il risultato
  - generano in uscita il risultato finale

l'apparente semplicità nasconde concetti più complessi

- una gestione pulita degli effetti collaterali

Esempio: programma Hello word

```haskell
module Main where

main :: IO ()
main = do
    putStrLn "Hello! What's your name?"
    name <- getLine
    putStrLn ("Hello, " ++ name ++ "!")
```

I/O

Haskell linguaggio funzionale puro

- non ci sono effetti collaterali nascosti
- posso definire solo funzioni, da un tipo ad un altro, senza effetti collaterali impliciti

Linguaggi funzionali puri rendono complesso gestire l'input-output

- anche in una versione semplice: stringa di input e stringa di output
- la coppia di stringhe costituiscono uno stato, `S`, che
- viene modificato dalle operazioni di input - output
  - input: consuma caratteri nel file di input per generare un valore
  - output: da un valore genera carattere inseriti nel file di output
- si creano effetti collaterali

Due alternative

- permetto che la valutazione di espressioni abbia effetti collaterali (side effect),
  senza segnalare questi effetti collaterali nel tipo dell'espressione
  - linguaggio funzionale non puro
  - soluzione di ML (Scheme)
  - il comportamento del programma dipende dall'ordine di valutazione
  - soluzione poco pratica nei linguaggi lazy
- introduco esplicitamente lo stato `S` nel tipo delle funzioni
  - una funzione `f :: A -> B` che modifica lo stato, rappresentata da:
  - `fs :: (A, S) -> (B, S)`
    curryficando:
    `fs :: A -> (S -> (B, S))`

Haskell

Seconda soluzione scelta da Haskell, funzionale puro:

- usando funzioni con effetti collaterali,
  definisco e rendo visibile nel modulo principale una funzione
  `main :: S -> ((), S)` `main :: IO()`
- l'esecuzione del programma, provoca la valutazione di `main`
  che modifica dello stato

Tipo `IO`

- In Haskell esiste un costruttore di tipo, predefinito `IO`
  - che posso interpretare, intuitivamente, come

```
type IO a = (S -> (a,S))  --- pseudo definizione
```

  - dove `S` rappresenta lo stato
- espressioni con tipo `IO a` rappresentano action
  - comandi, se hanno tipo tipo `IO ()`
  - espressioni, di tipo `a`, con effetti collaterali, se hanno tipo `IO a`

`IO` tipo astratto

- la definizione di tipo `IO` nascosta,
  - non esistono costruttori espliciti
  - ma esistono funzione predefinite sui tipi `IO`
    `getChar`, `putChar` ...
    implementano le operazione base di I/O

Funzioni base di input output

- `getChar :: IO Char`
  ossia `S -> (Char, S)`
  dato un stato, mi restituisce un carattere e lo stato modificato,
  (con un carattere in meno nel file di input)
- `putChar :: Char -> IO ()`
  ossia `Char -> S -> ( (), S)`
  - `()` è il tipo delle enuple con nessun elemento,
    contiene un unico valore, la enupla vuota `()`
    equivalente al void in C
  - `putChar`, dato un carattere ed uno stato
    restituisce lo stato modificato
    (con un carattere in più nel file di output)

Stato

- Come già scritto, il tipo `IO` nascosto, possiamo immaginare

```
type IO a = (S -> (a,S))
```

- Cosa sia esattamente lo stato `S` non è definito esplicitamente, intuitivamente contiene
  - i file di input e output
  - gli altri file manipolabili
  - eventuali condizioni di errore, eccezioni,

Separazionie parti funzionale - imperativa

Espressioni di tipo `IO` hanno:

- solo un numero limitato di funzioni base

La parti imperativa, non viene mescolato con quella funzionale

Per esempio:

- le uniche funzioni `f` definibili di tipo `(IO a) -> Integer` sono funzioni costanti
  funzioni che preso in input un comando (action) `c` lo ignorano, non lo eseguono

Operatori su IO

Posso comporre le action con:

- `(>>) :: IO a -> IO b -> IO b`
  `(S -> (a, S)) -> (S -> (b, S)) -> (S -> (b, S))`
  `(>>) c1 c2 = \s -> c2 (snd (c1 s))`
  - composizione di due comandi
  - trascurando in valore in `a` generato dal primo
  - `;` nei linguaggi imperativi
- `(>>=) :: IO a -> ( a -> IO b) -> IO b`
  `(S -> (a, S)) -> ((a, S) -> (b, S))) -> (S, (b -> S))`
  `(>>) c1 fc = \s1 -> let (a, s2) = c1 s1 in fc a s2`
  - compone i due comandi (azioni)
  - tenendo conto del risultato generato dalla prima

Operatori su IO

Posso creare un comando, banale, con:

- `return :: a -> IO a` `(a -> (S -> (a, S)))`
  `return v = \s -> (v, s)`
  - presa un'espressione `v` di tipo `a`
  - restituisce un'azione che lascia lo stato inalterato e ritorna `v`

Sintassi

La sintassi `(>>)`, `(>>=)` poco intuitiva nel caso di composizione di comandi

- `c1 >> c2 >> c3` associa a destra
  `c1 >> (c2 >> c3)`
  può essere scritto come

```
do {c1; c2; c3}
```

o come

```
do c1
   c2
   c3
```

Esempio

```
do getChar
   putChar 'h'
   putChar 'e'
```

Sintassi

- `c1 >>= (\ x -> ( c2 >>= (\ y -> c3)))`
  può essere scritto come

```
do {x <- c1; y <- c2; c3}
```

o come

```
do x <- c1
   y <- c2
   c3
```

Esempio

```
do c1 <- getChar
   c2 <- getChar
   putChar c2
   putChar c1
```

Monadi

Gli operatori `(>>)`, `(>>=)`, `return` sono motivati dalla nozione di monade

Nozione presa dalla matematica (teoria delle categorie)

- utile per descrivere diverse costruzione della matematica (insieme delle parti, grammatica libera su un alfabeto)
- in informatica utile per descrivere diversi costruttori di tipo (liste, `IO`, `Maybe`)
- in Haskell, esiste una `type class` per costruttori di tipo `Mondad m : * -> *`
  - `IO`, `[]`, `Maybe` sono `instance of Monad`, esempi di monadi
  - le funzioni caratterizzanti delle monadi troviamo
    - `(>>=) :: m a -> (a -> m b) -> m b`
    - `return :: a -> m a`

Idea intuitiva

- Inserisco il mio tipo di dato `a` dentro una struttura più ricca `ma`
- la funzione predefinita `return :: a -> m a`, opera l'inserzione
- definisco funzione sulle strutture ricche `m a -> m b`
  - a partire da funzioni sulle strutture semplici `a -> m b`
  - la funzione `(>>=) :: m a -> (a -> m b) -> m b` permette questo passaggio
    - il tipo `m a -> (a -> m b) -> m b` isomorfo a `(a -> m b) -> (m a -> m b)`

Monad definizione

```
class Applicative m => Monad (m :: * -> *) where
    (>>=) :: m a -> (a -> m b) -> m b
    return :: a -> m a

    (>>) :: m a -> m b -> m b
    (>>) m1 m2 = m1 >>= \_ -> m2
```

Le seguenti uguaglianze dovrebbero essere soddisfatte

```
return a >>= k  ==  k a
m >>= return  ==  m
m >>= (\x -> k x >>= h)  ==  (m >>= k) >>= h
```

Monadi esempi

```
instance Monad [a] with
  return x = [x]

  (=>>) xs fs = concatList (map fs xs)
  where
    concatLists = foldr (++) []

instance Monad (Maybe a) with
  return x = Just x

  (=>>) Nothing fs = Nothing
  (=>>) (Just x) fs = fs x
```

Monadi esempi uso

Monad sono instance di Functor, via

```
fmap f xm = do
              x <- xm
              return (f x)

fmap f xm =  xm >>= (\ x -> return (f x)

fmap f xm =  xm >>= ( return . f)

fmap f xm
```

- con `[]` (liste): `fmap`, applica `f` tutti gli elementi della lista `xm`
- con `Maybe`: applica `f` all'elemento in `Just`
- con `IO`: applica `f` al risultato restituito dall'action `xm`

Monadi esempi uso

Le funzioni caratteristiche delle monadi possono essere usate come base per la programmazione:

Estensione della somma ai valori `Maybe`

```
maybeAdd :: Num a => Maybe a -> Maybe a -> Maybe a
maybeAdd Nothing _  = Nothing
maybeAdd _ Nothing  = Nothing
maybeAdd (Just x) (Just y) = Just(x + y)
```

Usando le primitive delle monadi:

```
maybeAdd x y = do
    x1 <- x
    y1 <- y
    return (x1 + y1)
```

Monadi esempi uso

Con il tipo più generale:

```
maybeAdd :: Num a, Monad m => m a -> m a -> m a
maybeAdd x y = do
    x1 <- x
    y1 <- y
    return (x1 + y1)
```

posso applicare `maybeAdd` a liste o action

```
xs =   maybeAdd [1..3][5..8]
getx = maybeAdd readNumber readNumber
```

ottengo un polimorfismo di ordine superiore

Monadi esempi uso

```
[(x,y) | x <- [1,2,3] , y <- [3,2,1]]

[1,2,3] >>= (\ x -> [3,2,1] >>= (\y -> return (x,y)))

do x <- [1,2,3]
   y  <- [3,2,1]
   return (x,y)
```

Versione sofisticata

Nel caso di guardie nella list comprehesion l'esempio precedente

```
[(x,y) | x <- [1,2,3] , y <- [3,2,1], x /= y]
```

```
[1,2,3] >>= (\ x -> [3,2,1] >>= (\y -> return (x/=y) >>=
  (\r -> case r of True -> return (x,y)
                   _    -> fail "")))
```

```
do x <- [1,2,3]
   y <- [3,2,1]
   True <- return (x /= y)
   return (x,y)
```

- `fail` operatore sulle monadi per gestire casi di errore
- sulla monade `[]` (liste) `fail` è definito come la lista vuota `[]`
  - elemento neutro nella cancellazione

Separazione tra parte funzionale e IO

- Su action, espressioni di tipo `IO a`,
  posso usare solo gli operatori >> e >>=
  - posso comporre comandi
  - un comando può passare dati ad un altro comando
  - un espressione di tipo standard (`Integer`) non può forzare l'esecuzione di un comando,
    o estrarre informazioni da questo
- Un comando `IO a` costituito dalla composizione mediante
  - `>>` , `>>=`, `return` , `do`
  - di comandi elementari predefiniti,
    ma anche comandi composti
  - con `return` posso inserire espressioni da valutare

Riassumendo:

- dentro un comando posso chiamare funzioni
- dentro una funzione pura non posso chiamare comandi

Programmi compilati, entry point

In un programma compilato, devo definire l'entry point

- l'espressione che deve essere valutata come risultato dell'esecuzione del programma
- questa espressione deve avere:
  - nome `main`
  - tipo `IO`, tipicamente `IO ()`
    se avesse tipo diverso l'esecuzione del programma non avrebbe nessun effetto
- necessario introdurre dichiarazione di tipo per `main`

```
main :: IO()
main = do c <- getChar
          putChar c
          putChar '\n'
```

- nel caso di programma diviso in moduli (vedi più avanti), `main` deve essere visibile nel modulo `Main`

Funzioni di IO

Posso costruire comandi più complessi di `getChar` e `putChar`

combinazioni più comandi

```
getLine2 :: IO String
getLine2 = do c <- getChar
              if c == '\n'
                then return ""  --- alias per []
                else do l <- getLine2
                        return (c:l)
```

- getLine presente in Prelude

Esercizio: controllare la correttezza di tipo

Stampa stringa

```
putString :: String -> IO ()
putString [] = return ()
putString (x:xs) = do putChar x
                      putString xs
```

- in Prelude `putStr, putStrLn :: String -> IO ()`

```
putStrLn :: String -> IO ()
putStrLn [] = \putChar '\n`
putStrLn (x:xs) = do putChar x
                     putString xs
```

Esempi I/O

Diversamente da altri linguaggi, in Haskell le action (comandi), sono dato manipolabile come altri
es, assegnarlo a una variabile, costruisco un vettore di comandi

```
toDoList = [putChar 'H',
            do c <- getChar
               putChar c,
            putStrLn "ello" ]
toDoList :: [IO ()]
```

- non posso eseguire una lista di comandi,
- devo prima comporli in uno,
  - e quindi assegnarlo a `main`

```
sequence2 [] = return ()
sequence2 (c:cs) = do c
                      sequence2 cs
```

Tipo e definizioni alternative

```haskell
sequence2 :: [IO a] -> IO ()
sequence2 :: Monad m => [m a] -> m ()

-- foldr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b
sequence3 :: [IO a] -> IO ()
sequence3 = foldr (>>) (return ())

-- foldl :: Foldable t => (b -> a -> b) -> b -> t a -> b
sequence4 :: [IO ()] -> IO ()
sequence4 = foldl (>>) (return ())

c2 = sequence2 toDoList
c3 = sequence3 toDoList
c4 = sequence4 toDoList
```

una seconda definizione per putString

```
putString2 xs = sequence (map putChar xs)
```

File

- Gestione semplice dei file attraverso le funzioni

```
readFile :: FilePath -> IO String
writeFile :: FilePath -> String -> IO ()
appendFile :: FilePath -> String -> IO ()
```

dove

```
type FilePath = String  -- Defined in ‘GHC.IO’
```

Posso costruire comandi per copiare un file in un altro

```
copy fileS fileD = do s <- readFile fileS
                      writeFile fileD s

c5 = copy "sommaPari.hs" "prova"
```

File

Oppure comandi per copiare il contenuto il contenuto dopo averlo modificato

```
modify fSource fDestin trasf = do s <- readFile fSource
                                  writeFile fDestin (trasf s)

c6 = modify "sommaPari.hs" "prova" tail
```

sorgente e destinazione devono essere diversi.

Typeclass Show Read

Definiscono funzioni standard per dati in stringhe e viceversa__ per poter poi stampare e leggere valori da IO

```
class Show a where
  show :: a -> String
  shows ::  a -> String -> String
  showsPrec :: Int -> a -> String -> String
  showList :: [a] -> ShowS
  {-# MINIMAL showsPrec | show #-}
```

- `show` funzione usata dall'interprete per visualizzare espressioni
  - insieme a `putString` mi permette di stampare dei dati da programma

shows

- `shows :: a -> String -> String`
  funzione con accumulatore per migliorare l'efficienza, evito di dover concatenare liste

```
putStr ("i num. " ++ show x ++  ' ': show y ++ " sono uguali "
```

diventa

```
putStr ("i num. " ++ shows x  (' ': shows y " sono uguali "))
```

Esempio

```haskell
data BTree a = Null | BTree a (BTree a) (BTree a)

showBTree :: Show a => BTree a -> String
showBTree Null  = "_"
showBTree (BTree n tl tr) =
  '(':  showBTree tl ++  show n ++ showBTree tr ++ ")"
instance Show a => Show (BTree a) where
  show = showBTree
```

Implementazione più efficiente:

```haskell
showsBTree :: Show a => BTree a -> String -> String
showsBTree Null  = ('_':)
showsBTree (BTree n tl tr) =
  ('(':) . showsBTree tl .  shows n . showsBTree tr . (')':)
instance Show a => Show (BTree a) where
  showsPrec _ = showsBTree
```

In alternativa:

Evito la definizione esplicita dei metodi di `Show`

```
data BTree a = Null | BTree a (BTree a) (BTree a)
  deriving (Eq, Show)
```

costruisce un'implementazione canonica dei metodi delle typeclass `Show`, `Eq`

Read

Una type typeclass per leggere dati
trasformare una stringa di caratteri in un dato

Implementa un parser, usando back-tracking
semplice ma inefficiente

```
class Read a where
  readsPrec :: Int -> ReadS a
  readList :: ReadS [a]
  ...
  ...
  {-# MINIMAL readsPrec | readPrec #-}

type ReadS a = String -> [(a, String)]
```

Esempio

```
readsBTree ('_':s) = [(Null,s)]
readsBTree ('(':s) =
  [((BTree n tl tr), s3) | (tl, s1)  <- readsBTree s,
                           (n, s2)   <- reads s1,
                           (tr, ')':s3)  <- readsBTree s2 ]
readsBTree _ = []

readsBTree :: Read a => String -> [(BTree a, String)]

instance Read a => Read (BTree a) where
  readsPrec _ = readsBTree
```

Moduli

Sistema per gestire la visibilità dei nomi.

- Quadro generale
  - codice distribuito su più file
  - ogni file contiene una serie di definizione
    - tipi, typeclass, istanza, funzioni (posso apparire in ogni ordine)
    - solo alcuni resi visibile all'esterno
    - altre definizioni ausiliare
  - il programma principale sceglie
    - da che moduli, file importare
    - seleziona cosa importare

Esempio

```
module BinarySearchTree (Bst (Null, Bst), insert, empty)
  where
data Bst = ...
insert = ...
empty  = ...
```

- la lista `(Bst (Null, Bst), insert, empty)` definisce in nomi esportati
- definizione che non appaiono nella lista non visibili all'esterno
- i costruttori di in tipo di dato messi vicino al tipo per leggibilità
- se ometto la lista dei nomi, tutto viene esportato
  - `Bst(Null, Bst)`
  - `Bst(..)` possibile sintassi
  - `Bst(Null)` costruttore `Bst` non visibile all'esterno.

Tipi di dato astratti

- Posso utilizzare il moduli per implementare i tipi di dato astratti
  - nascondo l'effettiva implementazione del tipo di dato
  - fornisco solo un insieme di funzioni primitive per agire su questo
  - posso cambiare in modo trasparente l'implementazione

```
module BinarySearchTree (Bst, insert, null, empty, search)
```

Importazione

```
module Main (main)
  where
import  BinarySearchTree (Bst (Null), insert)
```

- le dichiarazione di `import` vanno messe in testa
- posso selezionare i nomi da importare
- `import BinarySeartTree` senza lista, importata tutti i nomi esportati
- `import BinarySeartTree hiding (insert)` nasconde alcune entity che posso ridefinire

Qualified names

I nomi importati possono essere sono usati se far “qualificare” il modulo da cui provengono

- possibile che lo stesso nome abbia più definizioni
  (ridefinizione dei nomi non possibile all’interno dello stesso modulo)

Tutte le definizione restano valide

- devo eliminare l’ambiguità usando qualified names, nomi con prefissi
  - `BinarySearchTree.insert`
  - `Main.insert`
- per indicare `insert` nel caso
  - abbia importato il modulo `BinarySearchTree`
  - abbia definito nel codice una funzione `insert`.

import qualified

Con

```
import qualified BinarySearchTree (Bst(Null), insert) as BST
```

- si forza l'uso dei qualified names,
- tutti in nomi importati da `BinarySearchTree` devono essere qualificati on il prefisso `BST.`
  - es.: `BST.insert`

Array

- In un linguaggio funzionale un array `[]char A` diventa funzione `A :: Int -> Char`, o una lista `A :: [Char]`
- Implementazione inefficiente, per migliorare le prestazioni Haskell fornisce un tipo `Array`, definito nel modulo `Array`, da caricare

```
import Array
```

nel modulo troviamo le seguenti definizioni

Index type

Un type class per gli indici

```
class (Ord a) => Ix a where
    range   :: (a,a) -> [a]
    index   :: (a,a) -> a -> Int
    inRange :: (a,a) -> a -> Bool
```

- posso costruire array con indici di `a` tipo qualsiasi, basta che `a` appartengano alla typeclass `Ix`
- sono dichiarati istanza di `Ix` gli interi, caratteri, enuple di istanze di `Ix` `(Int,Int)` usabili immediatamente come indici

Funzioni sugli array

Elenchiamo le più utili

Creazione:

```
array :: (Ix a) => (a,a) -> [(a,b)] -> Array a b
```

fornisco estremi degli indici, lista degli elementi, anche fuori ordine, (indice, valore),
posso non inizializzare tutti gli elementi

```
squares = array (1,100) [(i, i*i) | i <- [1..100]]
```

possibili definizioni ricorsive

Accesso ai singoli elementi

```
(!) :: Array a b -> a -> b
squares!7  =>  49
```

Funzioni sugli array

Accesso agli estremi del campo indici

```
bounds:: Array a b -> (a,a)

bounds squares  =>  (1,100)
```

Modifica, multipla di alcuni elementi nell'array:

```
(//) :: (Ix a) => Array a b -> [(a,b)] -> Array a b

swapRows :: (Ix a, Ix b, Enum b) =>
            a -> a -> Array (a,b) c -> Array (a,b) c
swapRows i i' a =
  a // ([((i, j), a!(i',j)) | j <- [jLo..jHi]] ++
        [((i',j), a!(i ,j)) | j <- [jLo..jHi]])
    where ((iLo,jLo),(iHi,jHi)) = bounds a
```

Formalmente si crea un nuovo array,
ma evitando di duplicare tutti gli elementi.