1) Sia $\hat{x} = Ky$ la stima lineare di varianza minima di un vettore di variabili casuali x basata sul vettore di osservazioni y. Dimostrare che

$$E[(x - \hat{x})(x - \hat{x})'] = E[xx'] - E[\hat{x}\hat{x}']$$

Soluzione

Sviluppando si ha

$$E[(x - \hat{x})(x - \hat{x})'] = E[xx'] - E[x\hat{x}'] - E[\hat{x}x'] + E[\hat{x}\hat{x}']$$

Siccome $x - \hat{x} \perp \hat{x}$, $E[(x - \hat{x})\hat{x}'] = 0$, cioè $E[x\hat{x}'] = E[\hat{x}\hat{x}']$ e quindi la tesi.

2) Data una variabile casuale x si trovi trovi la stima affine (lineare + costante) di minima varianza derivata da m osservazioni y_i. Si suppongono noti $\bar{x} = E[x]$ e $\bar{y}_i = E[y_i]$, $\forall i$. Si esprima il risultato in funzione di $E[(x - \bar{x})(y_i - \bar{y}_i)]$ e $E[(y_j - \bar{y}_j)(y_i - \bar{y}_i)]$. (suggerimento: il risultato può anche essere trovato pensando ad una stima ricorsiva)

Soluzione

Senza perdita di generalità una stima affine si può scrivere come

$$\hat{x} = K(y - \bar{y}) + \bar{x} + a$$

con K vettore e a scalare da determinare. Quindi $\hat{x}$ appartiene al sottospazio generato da y, $\bar{y}$ e $\bar{x}$ (si noti che solo y è aleatorio). Sappiamo che $(x - \hat{x}) \perp (y - \bar{y})$, quindi

$$E[(x - K(y - \bar{y}) - \bar{x} - a)(y - \bar{y})'] = 0$$

$$E[(x - \bar{x})(y - \bar{y})'] - K\,E[(y - \bar{y})(y - \bar{y})'] - E[a(y - \bar{y})'] =$$

$$E[(x - \bar{x})(y - \bar{y})'] - K\,E[(y - \bar{y})(y - \bar{y})'] - aE[y - \bar{y}]' =$$

$$E[(x - \bar{x})(y - \bar{y})'] - K\,E[(y - \bar{y})(y - \bar{y})'] = 0$$

e quindi

$$K = E[(x - \bar{x})(y - \bar{y})']\ E[(y - \bar{y})(y - \bar{y})']^{-1}$$

Inoltre $(x - \hat{x}) \perp \bar{y}$ e quindi

$$E[(x - K(y - \bar{y}) - \bar{x} - a)\bar{y}'] = 0$$

da cui

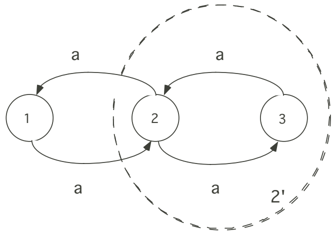
$$E[x - \bar{x}]\bar{y}' - K\,E[y - \bar{y}]\bar{y}' - a\,\bar{y}' = -a\,\bar{y}' = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = 0$$

Alternativamente si può vedere $\bar{x}$ come la stima ottima di x relativa ad osservazioni precedenti e $\bar{y}$ come la stima ottima delle osservazioni attuali sulla base di osservazioni precedenti. Quindi $y - \bar{y}$ costituisce l'innovazione $\tilde{y}$. Si può quindi applicare la formula

$$\hat{x} := \hat{x} + E[x\tilde{y}'](E[\tilde{y}\tilde{y}'])^{-1}\tilde{y}$$

e quindi pervenire all'espressione precedentemente trovata tenendo conto che $\tilde{y} \perp \bar{x}$.

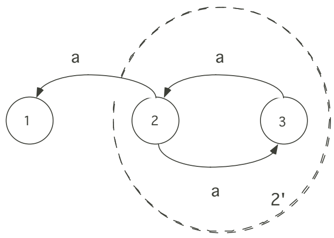
3) Sia dato il seguente processo Markoviano a tempo continuo, dove a rappresenta il tasso di transizione.



Si supponga che all'osservazione gli stati 2 e 3 siano indistinti, cioè quando il sistema si trova nello stato 2 o nello stato 3, un osservatore vede il sistema in un unico stato che indichiamo con $2'$. Un osservatore vede quindi soltanto le due transizioni $1 \to 2'$ e $2' \to 1$. Il processo visto dall'osservatore è ancora un processo Markoviano? Siano X_1 e X_2 due variabili aleatorie definite come il tempo di permanenza nello stato 1 e nello stato 2' rispettivamente. Si calcolino le distribuzioni di probabilità di X_1 e X_2. Si calcolino inoltre le probabilità di trovare (in un istante generico) il sistema nello stato 1 o nello stato 2'.

Soluzione

X_1 è ovviamente esponenziale con $F_1(t) = 1 - e^{-at}$. Per il calcolo di $F_2(t)$ si consideri il seguente processo Markoviano dove 1 è uno stato assorbente.



Allora si ha che $F_2(t) = p_{21}(t)$ dove $p_{ij}(t)$ è la componente generica della matrice di transizione $P(t)$ di questo processo il cui generatore infinitesimale è

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & -2a & a \\ 0 & a & -a \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di Q sono

$$0\,, \qquad \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\, a =: \alpha\,, \qquad \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\, a =: \beta$$

quindi ogni $p_{ij}(t)$ è combinazione lineare di 1 ($= e^{0t}$), $e^{\alpha t}$ e $e^{\beta t}$. Siccome $p_{21}(0) = 0$ e $p_{21}(\infty) = 1$ si ha

$$p_{21}(t) = 1 - A\, e^{\alpha t} - (1 - A)\, e^{\beta t}.$$

Per determinare A bisogna usare l'equazione differenziale $\dot{P}(t) = Q\, P(t)$ oppure $\dot{P}(t) = P(t)\, Q$. In questo caso è più semplice usare la prima espressione riferita alla prima colonna di $P(t)$. Ovviamente $p_{11}(t) = 1$, mentre $p_{31} = 1 - B\, e^{\alpha t} - (1-B)\, e^{\beta t}$, dato che $p_{31}(0) = 0$ e $p_{31}(\infty) = 1$, con B costante da determinare. Quindi

$$\dot{p}_{31}(t) = a\, p_{21}(t) - a\, p_{31}(t)$$

e, sostituendo,

$$-\alpha\, B\, e^{\alpha t} - \beta\,(1-B)\, e^{\beta t} = a\,(1 - A\, e^{\alpha t} - (1-A)\, e^{\beta t}) - a\,(1 - B\, e^{\alpha t} - (1-B)\, e^{\beta t})$$

cioè

$$(\alpha\, B - a\, A + a\, B)\, e^{\alpha t} + (\beta\,(1-B) - a\,(1-A) + a\,(1-B))\, e^{\beta t} = 0 \qquad \forall t$$

da cui si ricava il sistema

$$\begin{aligned} -\, a\, A + (a+\alpha)\, B &= \quad 0 \\ a\, A - (a+\beta)\, B &= -\,\beta \end{aligned}$$

le cui soluzioni sono

$$A = \frac{\beta\,(a+\alpha)}{a\,(\beta-\alpha)} = \frac{5+\sqrt{5}}{10}, \qquad B = \frac{\beta}{\beta-\alpha} = \frac{5+3\,\sqrt{5}}{10}$$

da cui

$$p_{21}(t) = F_2(t) = 1 + \frac{\beta\,(a+\alpha)}{a\,(\alpha-\beta)}\, e^{\alpha t} + \frac{\alpha\,(a+\beta)}{a\,(\beta-\alpha)}\, e^{\beta t} = 1 - \frac{5+\sqrt{5}}{10}\, e^{\alpha t} - \frac{5-\sqrt{5}}{10}\, e^{\beta t}$$

La transizione da 2' a 1 non è Markoviana. Infatti

$$\mathrm{Prob}[X_2 \geq t+s \,|\, X_2 \geq t] = \frac{\mathrm{Prob}[X_2 \geq t+s\,,\, X_2 \geq t]}{\mathrm{Prob}[X_2 \geq t]} = \frac{\mathrm{Prob}[X_2 \geq t+s]}{\mathrm{Prob}[X_2 \geq t]} =$$

$$\frac{A\, e^{\alpha(t+s)} + (1-A)\, e^{\beta(t+s)}}{A\, e^{\alpha t} + (1-A)\, e^{\beta t}} = e^{\alpha s}\, \frac{A + (1-A)\, e^{(\beta-\alpha)t}\, e^{(\beta-\alpha)s}}{A + (1-A)\, e^{(\beta-\alpha)t}} =: g(t,s)$$

Il grafico di $g(t,1)$ è riportato in figura 1. Come si vede $g(t,s)$ dipende anche da t e quindi la transizione non è Markoviana. Nel momento in cui il sistema si porta in 2' la probabilità di una transizione verso 1 è più elevata (nel grafico è riportata la probabilità di non avere la transizione), però all'aumentare di t la transizione tende ad essere Markoviana. Si noti appunto che $\lim_{t\to\infty} g(t,s) = e^{\alpha s}$ e quindi, per t grande, lo stato 2' si comporta come uno stato Markoviano con tasso d'uscita $-\alpha < a$.

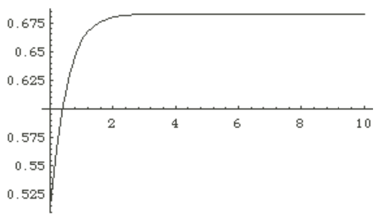


Figura 1

La probabilità di avere il sistema negli stati 1, 2 o 3 è 1/3 per ogni stato come si calcola facilmente da $qQ = 0$ e quindi le probabilità di essere in 1 o 2' sono 1/3 e 2/3. Si possono calcolare questi valori per altra via, come verifica dei precedenti calcoli. Infatti si può trovare che il valor medio di X_2 è $2/a$, mentre X_1 ha valor medio $1/a$, e, dato che X_1 e X_2 si alternano costantemente, si ricavano gli stessi valori.

4) Si supponga di cercare un parcheggio su un lato di una strada sufficientemente lunga. Si vuole parcheggiare il più vicino possibile ad un posto (parcheggio) prefissato sul lato della strada. La strada è a senso unico per cui non è possibile ritornare indietro. Inoltre supponiamo che un eventuale parcheggio vuoto sia visibile soltanto quando si arriva a lato del parcheggio stesso e che il viaggio sia iniziato da una distanza sufficientemente grande. Sia p la probabilità che un parcheggio sia vuoto. Si vuole determinare la strategia ottima, cioè quella che minimizza il valore atteso della distanza fra il parcheggio scelto e il parcheggio desiderato. (Certamente, una volta superato il parcheggio desiderato, la strategia ottima consiste nel fermarsi al primo parcheggio vuoto. Però nell'avvicinamento al parcheggio desiderato si può anche lasciar perdere un parcheggio vuoto nella speranza di trovarne uno più avanti.)

Soluzione

Si possono adottare due approcci: nel primo gli stati sono i parcheggi e le transizioni avvengono da un parcheggio vuoto ad un altro vuoto; in questo caso la catena di Markov è stazionaria (transizioni e guadagni non cambiano con il tempo); nel secondo approccio gli stati sono solo due: parcheggio vuoto e parcheggio occupato; in questo caso la catena non è stazionaria in quanto i guadagni cambiano all'avvicinarsi alla destinazione, però il problema può essere formulato con orizzonte finito dato che la politica ottima è nota dopo aver raggiunto la destinazione.

Approccio 1.

Indichiamo gli stati con numeri interi, assegnando l'etichetta 0 alla destinazione ed etichette positive ai parcheggi prima di raggiungere la destinazione. Sia $V(k)$ il valore ottimo quando si è accanto al parcheggio k-mo e questo risulta vuoto. Si noti che la probabilità di trovare vuoto il parcheggio successivo (cioè il parcheggio $k-1$) è p, la probabilità di trovare vuoto il parcheggio $k-2$ ed occupato il parcheggio $k-1$ è $p\,(1-p)$ e in generale la probabilità di trovare vuoto il parcheggio i ed occupati i parcheggi fra k ed i è $p\,(1-p)^{k-i-1}$. Quindi, considerando transizioni soltanto fra parcheggi vuoti, si ha la seguente equazione di ottimalità:

$$V(k) = \min\left\{|k|\ ;\ \sum_{i<k} p\,(1-p)^{k-i-1} V(i)\right\} \tag{1}$$

Se $k \le 0$ è ovviamente ottimo fermarsi. Quindi $V(k) = |k|$ se $k \le 0$. Allora possiamo riscrivere (1) come

$$\begin{aligned} V(k) = \min\left\{|k|\ ;\ \sum_{i=1}^{k-1} p\,(1-p)^{k-i-1} V(i) + \sum_{i=0}^{\infty} p\,(1-p)^{k+i-1}\, i\right\} = \\ \min\left\{|k|\ ;\ \sum_{i=1}^{k-1} p\,(1-p)^{k-i-1} V(i) + \frac{(1-p)^k}{p}\right\} \end{aligned} \tag{2}$$

Calcoliamo $V(1)$:

$$V(1) = \min\left\{1\ ;\ \frac{1-p}{p}\right\}$$

Qundi se $p \ge 1/2$ è ottimo non fermarsi. Ma è certamente ottimo non fermarsi se $p \ge 1/2$ per tutti i valori di $k \ge 1$. Quindi possiamo solamente interessarci al caso $p < 1/2$ e calcolare $V(2)$ assumendo $p < 1/2$. Se $p < 1/2$ allora $V(1) = 1$ e quindi

$$V(2) = \min\left\{2\ ;\ \frac{(1-p)^2}{p} + p\right\}$$

Dobbiamo quindi calcolare per quale p si ha

$$2 = \frac{(1-p)^2}{p} + p$$

Si ottiene $p = 1 - \sqrt{1/2}$. Allora abbiamo trovato che se $p > 1/2$ bisogna procedere senza fermarsi fino alla destinazione e poi scegliere il primo parcheggio vuoto. Se invece $1 - \sqrt{1/2} < p \le 1/2$ si procede senza fermarsi fino al parcheggio 1 e poi si sceglie il primo parcheggio vuoto. Per il calcolo di $V(3)$ possiamo quindi assumere $1 - \sqrt{1/2} > p$ nel qual caso $V(2) = 2$ e $V(1) = 1$. In generale possiamo calcolare:

$$V(k) = \min \left\{ |k| \; ; \; \sum_{i=1}^{k-1} p\,(1-p)^{k-i-1} i + \frac{(1-p)^k}{p} \right\} \tag{3}$$

ottenuta da (2) sostituendo $V(i)$ con i (nell'ipotesi che p sia al di sotto di un'opportuna soglia). Applicando la formula

$$\sum_{i=1}^{k} a^i\, i = \frac{a + k\, a^{k+2} - (k+1)\, a^{k+1}}{(1-a)^2}$$

(3) diventa

$$V(k) = \min \left\{ k \; ; \; 2\frac{(1-p)^k}{p} + k - \frac{1}{p} \right\}$$

da cui, uguagliando i termini si ottiene

$$p = 1 - \sqrt[k]{\frac{1}{2}}$$

come valori di soglia. Quindi la politica ottima è di procedere senza fermarsi sino al parcheggio k per cui si ha

$$1 - \sqrt[k]{\frac{1}{2}} < p \le 1 - \sqrt[k-1]{\frac{1}{2}} \qquad \text{ovvero} \qquad k = \left\lfloor -\frac{1}{\log_2(1-p)} \right\rfloor \tag{4}$$

Ad esempio se mediamente un parcheggio ogni 10 è vuoto ($p = 0.1$) risulta $k = 6$ e per $p = 0.05$ risulta $k = 13$. Inoltre per valori piccoli di p, $\log_2(1-p)$ è approssimabile con $-p \log_2 e$ e quindi (4) è uguale a $\lfloor \ln 2/p \rfloor$ tranne che in intorni dei valori critici $p_k := 1 - \sqrt[k]{1/2}$.

Approccio 2.

In questo approccio ci sono due stati, lo stato 0 che corrisponde al trovare un parcheggio vuoto e lo stato 1 che corrisponde al trovare un parcheggio occupato. Ad ogni istante si visita un parcheggio (che può essere vuoto oppure occupato) per cui possiamo identificare il tempo con i parcheggi. L'equazione di ottimalità diventa in questo caso:

$$\begin{aligned} V_k(0) &= \min \{ k \; ; \; p\, V_{k-1}(0) + (1-p)\, V_{k-1}(1) \} \\ V_k(1) &= p\, V_{k-1}(0) + (1-p)\, V_{k-1}(1) \end{aligned}$$

Si noti che $k \le h$ implica $V_k(i) \ge V_h(i)$ per come è definito il problema. Sia $\bar{k}$ tale che

$$\bar{k} \le p\, V_{\bar{k}-1}(0) + (1-p)\, V_{\bar{k}-1}(1)$$

Allora se $k \le \bar{k}$ abbiamo anche

$$k \le p\, V_{k-1}(0) + (1-p)\, V_{k-1}(1)$$

e quindi $V_k(0) = k$ da cui

$$V_k(1) = p\,(k-1) + (1-p)\, V_{k-1}(1) \qquad \text{se } k \le \bar{k} \tag{5}$$

Poiché $V_0(1) = 1/p$ (come si calcola facilmente) vogliamo trovare una formula chiusa per la ricorsione (5) che riscriviamo come

$$V_{k+1} = k\,p + (1-p)\,V_k, \qquad k \geq 0, \qquad V_0 = \frac{1}{p}$$

Useremo le funzioni generatrici. Quindi moltiplicando ogni per termine per z^k e sommando si ha

$$\sum_{k\geq 0} z^k\,V_{k+1} = \sum_{k\geq 0} k\,z^k\,p + (1-p)\sum_{k\geq 0} z^k\,V_k$$

Si indichi $\varphi(z) := \sum_{k\geq 0} z^k\,V_k$. Allora

$$\sum_{k\geq 0} z^k\,V_{k+1} = \frac{1}{z}\sum_{k\geq 0} z^{k+1}\,V_{k+1} = \frac{1}{z}\,(\varphi(z) - V_0)$$

e quindi

$$\frac{1}{z}\,(\varphi(z) - V_0) = p\,\frac{z}{(1-z)^2} + (1-p)\,\varphi(z)$$

da cui si ottiene sostituendo $V_0 = 1/p$:

$$\varphi(z) = \frac{(p^2+1)\,z^2 - 2\,z + 1}{p\,(1-z)^2\,(1-z(1-p))} \tag{6}$$

Vogliamo trovare delle costanti A, B e C tali che

$$\varphi(z) = \frac{1}{p}\left(\frac{A + B\,z}{(1-z)^2} + \frac{C}{(1-z(1-p))}\right) \tag{7}$$

Confrontando (6) e (7) si ottiene

$$A = -1, \qquad B = (1+p), \qquad C = 2,$$

e quindi

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \frac{1}{p}\sum_{k\geq 0}\left(A\,(k+1) + B\,k + C\,(1-p)^k\right)\,z^k = \\ &= \frac{1}{p}\sum_{k\geq 0}\left(-(k+1) + (1+p)\,k + 2\,(1-p)^k\right)\,z^k = \\ &= \frac{1}{p}\sum_{k\geq 0}\left(-1 + k\,p + 2\,(1-p)^k\right)\,z^k\end{aligned}$$

e quindi

$$V_k = k - \frac{1}{p} + \frac{2\,(1-p)^k}{p}$$

Allora

$$V_k(1) = k - \frac{1}{p} + \frac{2\,(1-p)^k}{p}$$

se $k \leq \bar{k}$ dove $\bar{k}$ è il più grande valore di k per cui

$$k \leq p\,V_{k-1}(0) + (1-p)\,V_{k-1}(1) = V_k(1) = k - \frac{1}{p} + \frac{2\,(1-p)^k}{p}$$

ovvero

$$\bar{k} = \left\lfloor -\frac{1}{\log_2(1-p)}\right\rfloor$$

e per $k \leq \bar{k}$ ci si ferma se il parcheggio è vuoto e per valori $k > \bar{k}$ si prosegue.

5) In un processo Markoviano di decisione sia $r_t(a) = r_{t+s}(a)$ e $P_t(a) = P_{t+s}(a)$ per ogni t con s intero positivo prefissato. In altre parole il sistema è periodico con periodo s. Si indichi una procedura per calcolare la politica ottima ad orizzonte infinito con fattore di sconto sulla singola unità temporale.

Soluzione

Una politica è fissata assegnando i vettori $\pi_1, \ldots, \pi_s$ le cui decisioni vengono poi ripetute periodicamente. Si indichi $S_k(\pi) = \prod_{i=k}^{1} P_i(\pi_i)$. Il valore di una politica è quindi dato da:

$$V = r_1(\pi_1) + \lambda\, S_1(\pi)\, r_2(\pi_2) + \ldots + \lambda^{s-1}\, S_{s-1}(\pi)\, r_s(\pi_s) + \lambda^s\, S_s\, r_1(\pi_1) + \lambda^{s+1}\, S_1(\pi)\, S_s(\pi)\, r_2(\pi_2) + \ldots =$$

$$r_1(\pi_1) + \lambda\, S_1(\pi)\, r_2(\pi_2) + \ldots + \lambda^{s-1}\, S_{s-1}(\pi)\, r_s(\pi_s) + \lambda^s\, S_s\, (r_1(\pi_1) + \lambda\, S_1(\pi)\, r_2(\pi_2) + \ldots) = R(\pi) + \lambda^s\, S_s\, V$$

dove

$$R(\pi) := r_1(\pi_1) + \lambda\, S_1(\pi)\, r_2(\pi_2) + \ldots + \lambda^{s-1}\, S_{s-1}(\pi)\, r_s(\pi_s)$$

Quindi

$$V = (I - \lambda^s\, S_s)^{-1}\, R(\pi)$$

Si può quindi applicare l'iterazione sulle politiche. Si noti che si può interpretare l'iterazione come se fosse non periodica ad orizzonte infinito dove ad ogni stato sono disponibili le decisioni $(a_1, a_2, \ldots a_s)$ ed $S_s(\pi)$ è la matrice di transizione dovuta alla politica π. Usando la programmazione lineare si avrebbe:

$$\begin{array}{lll}
\min & \displaystyle\sum_t \sum_i \alpha_t(i)\, V_t(i) & \\
V_1(i) & \displaystyle\geq r_1(a,i) + \lambda \sum_j p_1(i,j,a)\, V_2(j) & \forall a, \forall i \\
V_2(i) & \displaystyle\geq r_2(a,i) + \lambda \sum_j p_2(i,j,a)\, V_3(j) & \forall a, \forall i \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\
V_s(i) & \displaystyle\geq r_s(a,i) + \lambda \sum_j p_s(i,j,a)\, V_1(j) & \forall a, \forall i
\end{array}$$

6) Si sa che un'urna contiene tre palline, alcune delle quali (inclusi i casi nessuna o tutte) bianche e le altre nere. Non è noto quante siano le palline bianche. Si tratta di indovinare il colore della pallina che verrà estratta. Se si indovina si guadagna 100, altrimenti si perde 50. È concesso tuttavia effettuare a pagamento un'estrazione di prova, *senza reimmissione della pallina nell'urna*, dopo la quale si può cercare di indovinare il colore della pallina che si estrarrà fra le due rimanenti, oppure effettuare a pagamento un'ulteriore ed ultima estrazione di prova, nuovamente senza reimmissione, e concludere cercando di indovinare il colore dell'unica pallina rimasta nell'urna. Quanto devono valere i pagamenti affinché sia indifferente effettuare o non effettuare le estrazioni di prova? (NB: le ipotesi a priori su come sia fatta l'urna sono cruciali ai fini del problema e possono portare a risultati molto diversi; si valuti attentamente questo aspetto del problema e si formulino possibilmente ipotesi a priori alternative valutandone le conseguenze).

Soluzione:

Senza alcuna conoscenza a priori della distribuzione di palline bianche e nere nell'urna, possiamo assumere che la probabilità $p(B)$ di estrazione di una pallina bianca sia $1/2$. Quindi il valore atteso del guadagno è $100 \cdot 0.5 - 50 \cdot 0.5 = 25$ sia che si dichiari bianco o nero.

Per modellare il problema nel caso di estrazioni di prova che fanno modificare la probabilità a posteriori della distribuzione di palline, conviene definire alcune ipotesi alternative sulla composizione dell'urna. Sia H_k l'ipotesi secondo la quale ci sono k palline bianche nell'urna. Quindi $p(H_k)$ è la probabilità a priori dell'ipotesi H_k.

La scelta di $p(H_k)$ è cruciale. Differenti ipotesi portano a risultati drasticamente diversi. La mancanza di informazione sulla composizione dell'urna rende plausibili diverse ipotesi sulla casualità di un'urna. Ad esempio possiamo pensare che un'urna casuale venga generata introducendo una pallina alla volta scegliendo con probabilità uguale fra la pallina bianca e quella nera. Chiamiamo questa *Ipotesi A*. Secondo l'Ipotesi A $p(H_k) = 2^{-n} \binom{n}{k}$ (dove n è il numero di palline nell'urna). Alternativamente possiamo pensare che l'urna venga generata scegliendo a caso fra 0 e n il numero di palline bianche. Chiamiamo questa *Ipotesi B*. Secondo l'Ipotesi B $p(H_k) = 1/(n+1)$. Si noti che sia l'Ipotesi A che l'Ipotesi B sono consistenti con la precedente ipotesi di probabilità a priori 1/2 di estrazione della pallina bianca, in quanto , dato che $p(B|H_k) = k/n$,

$$p(B) = \sum_{k=0}^{n} p(B|H_k)\, p(H_k) = \left\{ \begin{array}{ll} n^{-1}\, 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} & \text{(Ipotesi A)} \\ n^{-1}\,(n+1)^{-1} \sum_{k=0}^{n} k & \text{(Ipotesi B)} \end{array} \right\} = \frac{1}{2}$$

(il calcolo dell'espressione $\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$ può essere eseguito nel seguente modo:

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\, x^{k-1} \binom{n}{k} \Big|_{x=1} = \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{n} x^k \binom{n}{k} \Big|_{x=1} = \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^{n} x^k \binom{n}{k} - 1 \right) \Big|_{x=1} =$$

$$\frac{d}{dx} \left((x+1)^n - 1\right) \Big|_{x=1} = n\,(x+1)^{n-1} \Big|_{x=1} = n\, 2^{n-1})$$

Supponiamo che la pallina estratta (in prova) sia bianca. Vogliamo valutare $p(H_k|B)$ sfruttando la formula di Bayes:

$$p(H_k|B) = \frac{p(B|H_k)\, p(H_k)}{\sum_h p(B|H_h)\, p(H_h)}$$

Secondo l'Ipotesi A si ottiene

$$p(H_k|B) = \frac{k}{n}\, 2^{-(n-1)} \binom{n}{k} = 2^{-(n-1)} \binom{n-1}{k-1}$$

cioè esattamente la probabilità a priori di avere $(k-1)$ palline bianche in un'urna di $(n-1)$ palline e quindi l'informazione aggiuntiva dovuta all'estrazione è nulla! Assumendo invece l'Ipotesi B si ottiene

$$p(H_k|B) = \frac{2\,k}{n\,(n+1)}$$

che sposta sensibilmente la probabilità verso un'urna con un maggior numero di palline bianche. Per $n = 3$ si hanno i seguenti valori

$$(\text{Ipotesi A}) \rightarrow p(H_k|B) = \begin{cases} 0 & k=0 \\ 1/4 & k=1 \\ 1/2 & k=2 \\ 1/4 & k=3 \end{cases} \qquad (\text{Ipotesi B}) \rightarrow p(H_k|B) = \begin{cases} 0 & k=0 \\ 1/6 & k=1 \\ 1/3 & k=2 \\ 1/2 & k=3 \end{cases}$$

Se si assume l'Ipotesi A il problema termina qui in quanto si è visto che l'estrazione di prova è inutile. Continuiamo allora assumendo valida l'Ipotesi B. Sia H'_k l'ipotesi che vi siano k palline bianche nell'urna dopo aver estratto in prova una pallina bianca. Allora $p(H'_k) = p(H_{k+1}|B)$. A questo punto la probabilità $p(B')$ di estrarre una pallina bianca è data da

$$p(B') = \sum_{k=0}^{n-1} p(B'|H'_k)\,p(H'_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{(n-1)}\,\frac{2\,(k+1)}{n\,(n+1)} =$$

$$\frac{2\,(\sum_{k=0}^{n-1} k^2 + \sum_{k=0}^{n-1} k)}{(n+1)\,n\,(n-1)} = \frac{\frac{(n-1)\,n\,(2\,n-1)}{3} + n\,(n-1)}{(n+1)\,n\,(n-1)} = \frac{\frac{(2\,n-1)}{3} + 1}{(n+1)} = \frac{2}{3}$$

Il risultato ottenuto è alquanto sorprendente: la probabilità è indipendente dal numero di palline nell'urna e basta la singola estrazione di una pallina bianca per spostare la probabilità da 1/2 a 2/3!

Allora il valore atteso del guadagno è, supponendo di dichiarare bianco dopo aver visto una pallina bianca nell'estrazione di prova, $100 \cdot 2/3 - 50 \cdot 1/3 = 50$. Simmetricamente lo stesso valore atteso si ottiene se nell'estrazione di prova esce una pallina nera e si dichiara nero. Dato che le probabilità dell'estrazione di prova sono 1/2 e 1/2, si vede che l'estrazione di prova porta ad un guadagno atteso di 50. Quindi per avere indifferenza il costo dell'estrazione deve essere 25.

Si consideri ora la seconda estrazione di prova. Se esce una pallina bianca le probabilità a posteriori delle ipotesi H'_k vanno calcolate come:

$$p(H'_k|B') = \frac{p(B'|H'_k)\,p(H'_k)}{p(B')} = \frac{\frac{k}{(n-1)}\,\frac{2\,(k+1)}{n\,(n+1)}}{\frac{2}{3}}$$

che fornisce, per $n = 3$,

$$p(H'_k|B') = \begin{cases} 0 & k=0 \\ 1/4 & k=1 \\ 3/4 & k=2 \end{cases}$$

Se invece esce una pallina nera si ha

$$p(H'_k|N') = \frac{p(N'|H'_k)\,p(H'_k)}{p(N')} = \frac{\frac{(n-1-k)}{(n-1)}\,\frac{2\,(k+1)}{n\,(n+1)}}{\frac{1}{3}}$$

cioè, per $n = 3$,

$$p(H'_k|N') = \begin{cases} 1/2 & k = 0 \\ 1/2 & k = 1 \\ 0 & k = 2 \end{cases}$$

Allora, dopo due estrazioni di prova con due palline bianche, la probabilità che anche la terza sia bianca è di $3/4$, per cui, dichiarando bianco, si ha una guadagno atteso di $100 \cdot 3/4 - 50 \cdot 1/4 = 62.5$. Se invece la pallina della seconda estrazione è nera, la terza pallina può essere bianca o nera con la stessa probabilità e quindi il guadagno atteso è 25. Considerando che le probabilità di pallina bianca e nera nella seconda estrazione sono $2/3$ e $1/3$, il guadagno atteso è $2/3 \cdot 125/2 + 1/3 \cdot 25 = 50$.

Sorprendentemente non c'è nessun vantaggio a eseguire una seconda estrazione e quindi il suo costo dovrebbe essere nullo.

7) Un agricoltore ha a disposizione 100 ettari per piantare granoturco, sorgo oppure soia. La resa dei tre prodotti dipende dalla stagione e vale, in quintali per ettaro:

	grano	sorgo	soia
piovoso	50	22	23
secco	23	18	17

La probabilità di una stagione piovosa è 0.6. Il prezzo del grano è di 20 KL/q (KL=migliaia di lire) mentre sorgo e soia si vendono a 40 KL/q. Il costo totale di produzione per ogni piantagione è di 500 KL per ettaro indipendentemente dal tipo di stagione. L'agricoltore può anche allevare bestiame. Un capo di bestiame usa 20 quintali di grano e il suo profitto, senza tener conto del consumo di grano è di 430 KL. Inoltre il grano può essere comprato in qualsiasi momento sul mercato al prezzo di 22 KL/q. La decisione di cosa e quanto produrre e quanti capi di bestiame allevare deve essere fatta prima della stagione.

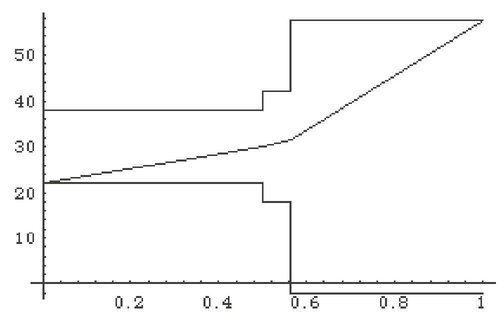
Soluzione: Le decisioni di primo periodo riguardano quanti ettari dedicare alle tre piantagioni e quanti capi di bestiame allevare. Le decisioni di secondo periodo, divise secondo il tipo di stagione, riguardano le quantità di grano da acquistare sul mercato per il bestiame e le quantità di grano prodotto in proprio che si vogliono vendere oppure usare per il bestiame.

Un possibile modello di PL (scritto in Lingo) che risolve il problema è il seguente (prezzi in KL, pesi in quintali, aree in ettari):

```
! xg = ettari coltivati a grano;
! xr = ettari coltivati a sorgo;
! xs = ettari coltivati a soia;
[ettari] xg + xs + xr < 100;
! pgs = produzione grano stagione secca;
! pgp = produzione grano stagione piovosa;
! prs = produzione sorgo stagione secca;
! prp = produzione sorgo stagione piovosa;
! pss = produzione soia stagione secca;
! psp = produzione soia stagione piovosa;
pgp = xg* 50; pgs= xg * 23;
psp = xs* 23; pss= xs * 17;
prp = xr* 22; prs= xr * 18;
! gvp = grano venduto con stagione piovosa;
! gvs = grano venduto con stagione secca;
[vendgrp] gvp < pgp;
[vendgrs] gvs < pgs;
! ricap = ricavo agricolo stagione piovosa;
! ricas = ricavo agricolo stagione secca;
ricap = gvp * 20 + psp * 40 + prp * 40;
ricas = gvs * 20 + pss * 40 + prs * 40;
! c= costo produzione;
c= 500 * (xg + xs + xr);
```

```
! profap = profitto agricolo stagione piovosa;
! profas = profitto agricolo stagione secca;
profap= ricap - c; @BND(-1000000,profap,1000000);
profas= ricas - c; @BND(-1000000,profas,1000000);
! (l'istruzione @BND è necessaria perché i valori possono essere negativi);
! b = capi di bestiame allevati;
! gb = grano usato dal bestiame;
gb = 20 * b;
! gmp = grano comprato sul mercato con stagione piovosa;
! gms = grano comprato sul mercato con stagione secca;
[grcompp] gb < pgp - gvp + gmp;
[grcomps] gb < pgs - gvs + gms;
! profbp = profitto bestiame stagione piovosa;
! profbs = profitto bestiame stagione secca;
profbp = b * 430 - gmp * 22; @BND(-1000000,profbp,1000000);
profbs = b * 430 - gms * 22; @BND(-1000000,profbs,1000000);
! proftp = profitto totale stagione piovosa;
! profts = profitto totale stagione secca;
proftp = profap + profbp; @BND(-1000000,proftp,1000000);
profts = profas + profbs; @BND(-1000000,profts,1000000);
! prob = probabilità stagione piovosa;
prob =0.9;
! profitto = profitto atteso;
profitto = prob * proftp + (1-prob) * profts; @BND(-100000,profitto,1000000);
max = profitto;
```

Risolvendo per valori diversi di probabilità si trova che per probabilità di stagione piovosa compresa fra 0 e 0.5 conviene produrre solo sorgo. Per probabilità fra 0.5 e 0.562 conviene produrre solo soia mentre per le restanti probabilità conviene produrre solo granoturco e utilizzarlo tutto per il bestiame. Il seguente grafico mostra l'andamento del valore atteso del profitto in funzione della probabilità e i valori di profitto reale che si otterranno in base alla decisione ottima a seconda dell'andamento futuro della stagione.

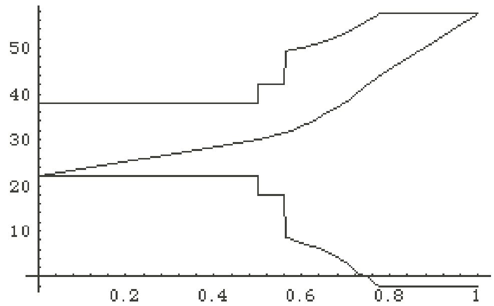


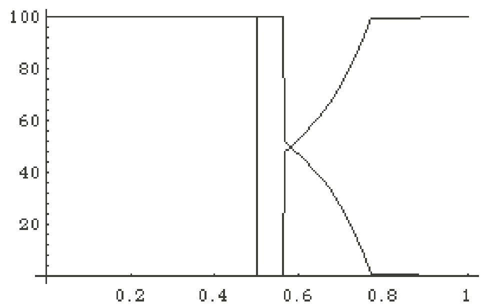
Come si vede la soluzione dipende in modo molto drastico dalla probabilità. In particolare per valori fra 0.5 e 0.6 la decisione oscilla fra produrre solo soia o sorgo (con poca differenza fra questi due casi) a produrre solo grano e utilizzarlo tutto per allevare 250 capi di bestiame. Quest'ultima decisione in particolare presenta il rischio che se la stagione sarà invece secca, contrariamente alle aspettative, si produrrà una perdita di 1,9 milioni. La decisione di produrre solo sorgo presenta invece un profitto garantito di 20 milioni.

Volendo diminuire il rischio di perdite si può fissare un valore di 20 milioni come soglia e ammettere un diminuzione di al massimo 5 milioni. si tratta quindi di aggiungere al programma le seguenti istruzioni:

! abbassamento del rischio;
! minprof= soglia di minimo profitto;
! lossp = perdita rispetto alla soglia stagione piovosa;
! losss = perdita rispetto alla soglia stagione secca;
! risk = diminuzione ammessa rispetto alla soglia;
minprof = 20000;
risk= 5000;
[downp] proftp > minprof - lossp;
[downs] profts > minprof - losss;
[risk] prob * lossp + (1-prob) * losss < risk;

L'introduzione del rischio ha comportato una variazione della politica ottima in un intorno dei valori critici di probabilità, come si vede dai seguenti diagrammi:





Nel secondo diagramma viene rappresentata la produzione scelta. Fino alla probabilità 0.5 si produce solo sorgo. Fra 0.5 e 0.562 solo soia. A differenza di prima per probabilità superiori si produce un misto di granoturco e soia partendo da una divisione di 47.5 ettari a grano e i restanti a soia. La produzione di grano cambia in modo non lineare fino alla probabilità 0.78, dopo la quale si produce solo grano. Come nel caso precedente il grano viene utilizzato solo per la produzione di bestiame la cui quantità segue quella del grano prodotto nell'aspettativa di stagione piovosa. Il modello prevede l'acquisto di grano per il bestiame nel caso malaugurato in cui la stagione sia invece secca.

8) Si consideri un problema con stati 0,1 e due azioni 1,2 con guadagni

$$R_0(1) = 1, \qquad R_1(1) = 0$$
$$R_0(2) = 2, \qquad R_1(2) = 0$$

($R_i(a)$ è il guadagno nello stato i a seguito dell'azione a) e probabilità di transizione

$$P_{00}(1) = \frac{1}{2}, \qquad P_{00}(2) = \frac{1}{4}$$
$$P_{10}(1) = \frac{2}{3}, \qquad P_{10}(2) = \frac{1}{3}$$

($P_{ij}(a)$ è la probabilità di una transizione da i a j a seguito dell'azione a). Sia il fattore di conto $\lambda = 1/2$. Si calcoli la politica ottima di questo processo Markoviano di decisione ad orizzonte infinito (con fattore di sconto).

Soluzione

Si supponga di adottare la tecnica di risoluzione che itera sulle politiche. Si scelga inizialmente la politica $d = (1, 1)$ (cioè azione 1 sia nello stato 0 che nello stato 1). Con questa politica le probabilità di transizione sono date dalla matrice

$$P_d = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

e il vettore dei guadagni da $r_d = (1, 0)$. Per calcolare il valore V_d di questa politica bisogna quindi risolvere il sistema lineare:

$$(I - \lambda\, P_d)\, V_d = r_d \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_d(0) \\ V_d(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} V_d(0) \\ V_d(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{13} \\ \frac{8}{13} \end{pmatrix}$$

Con questo valore si calcola quale politica massimizza

$$r_d(i) + \lambda \sum_{j \in S} P_d(i, j)\, V_d(j)$$

per $i = 0$ e $i = 1$. Si tratta allora di confrontare, componente per componente, i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.5 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{20}{13} \\ \frac{8}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{13} \\ \frac{8}{13} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.5 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{20}{13} \\ \frac{8}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{63}{26} \\ \frac{6}{13} \end{pmatrix}$$

che fornisce quindi $d = (2, 1)$ da cui

$$P_d = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

e $r_d = (2, 0)$, da cui

$$(I - \lambda\, P_d)\, V_d = r_d \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_d(0) \\ V_d(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} V_d(0) \\ V_d(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{80}{29} \\ \frac{32}{29} \end{pmatrix}$$

Con questi valori si riottiene $d = (2, 1)$ che è quindi ottima. La politica ottima consiste pertanto nel decidere per l'azione 2 nello stato 0 e per l'azione 1 nello stato 0.

Alternativamente si può risolvere il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_j \alpha_j V(j) \\ & V(i) \geq R_a(i) + \lambda \sum_i P_a(i,j) V(j) \qquad \forall a \forall i \end{aligned}$$

dove gli α_j sono coefficienti arbitrari purché strettamente positivi. Si ottiene il seguente programma

$$\begin{aligned} \min \quad & V(0) + V(1) \\ & 0.75\,V(0) - 0.25\,V(1) \geq 1 \\ & 0.875\,V(0) - 0.375\,V(1) \geq 2 \\ & -0.3333\,V(0) + 0.83333\,V(1) \geq 0 \\ & -0.1666\,V(0) + 0.66666\,V(1) \geq 0 \end{aligned}$$

che dà come soluzione primale $V(0) = 2.758$ e $V(1) = 1.1034$ e come soluzione duale $x_a(i)$, $x_1(0) = 0$, $x_1(1) = 2.068$, $x_2(0) = 1.931$, $x_2(1) = 0$.

9) Da un mazzo di 52 carte da gioco si pesca una carta alla volta. Prima di pescare la carta si può dichiarare che la carta sarà l'asso di picche. Questa dichiarazione può essere fatta una sola volta. Se la carta che verrà pescata è veramente l'asso di picche allora si vince, altrimenti si perde. Se non si dichiara niente e la carta è l'asso di picche si perde, altrimenti si passa a pescare un'altra carta.

Si imposti il problema di massimizzare la probabilità di vittoria come un processo markoviano di decisione (non stazionario). Qual è la politica ottima?

Si supponga di avere a disposizione due dichiarazioni. Come è la politica ottima?

Soluzione

Conviene considerare tre stati: uno stato (0) che indica "il gioco continua", uno stato (+) che indica "fine con vittoria", uno stato (−) che indica "fine con sconfitta". Le due azioni possibili sono D (dichiarazione) e N (non dichiarazione). Se mancano n carte da scoprire le probabilità di transizione sono (solo quelle dallo stato (0) interessano):

$$P_n(0,-,N) = \frac{1}{n}; \quad P_n(0,0,N) = \frac{n-1}{n}; \quad P_n(0,+,N) = 0;$$

$$P_n(0,-,D) = \frac{n-1}{n}; \quad P_n(0,0,D) = 0; \quad P_n(0,+,D) = \frac{1}{n};$$

Sia V_n la massima probabiità di vittoria quando nel mazzo ci sono ancora n carte e supponendo che lo stato sia ancora lo stato (0). Ovviamente si ha $V_1 = 1$ (in quanto l'unica carta da scoprire non può che essere l'asso di picche e quindi conviene dichiarare). Ad un passo generico si ha:

$$V_n = \max\left\{P_n(0,0,N)\,V_{n-1}\ ;\ P_n(0,+,D)\right\} = \max\left\{\frac{n-1}{n}\,V_{n-1}\ ;\ \frac{1}{n}\right\}$$

Si vede subito che $V_n = 1/n$ e che è indifferente dichiarare o non dichiarare.

Nel caso si possa effettuare una seconda dichiarazione, bisogna aggiungere al modello uno stato (1) che indica la continuazione del gioco avendo già fatto una dichiarazione. Ora le probabilità sono:

$$P_n(0,-,N) = \frac{1}{n}; \quad P_n(0,0,N) = \frac{n-1}{n}; \quad P_n(0,+,N) = 0;$$
$$P_n(1,-,N) = \frac{1}{n}; \quad P_n(1,1,N) = \frac{n-1}{n}; \quad P_n(1,+,N) = 0;$$
$$P_n(0,-,D) = 0; \quad P_n(0,1,D) = \frac{n-1}{n}; \quad P_n(0,+,D) = \frac{1}{n};$$
$$P_n(1,-,D) = \frac{n-1}{n}; \quad P_n(1,1,D) = 0; \quad P_n(1,+,D) = \frac{1}{n};$$

Sia $V_n(i)$ la massima probabiità di vittoria quando nel mazzo ci sono ancora n carte e supponendo che lo stato sia lo stato (i) $(i = 0, 1)$. Ovviamente si ha $V_1(0) = V_1(1) = 1$. Ad un passo generico si ha:

$$V_n(0) = \max\left\{P_n(0,0,N)\,V_{n-1}(0)\ ;\ P_n(0,+,D) + P_n(0,1,D)\,V_{n-1}(1)\right\} =$$

$$\max\left\{\frac{n-1}{n}\,V_{n-1}(0)\ ;\ \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\,V_{n-1}(1)\right\}$$

Si vede subito che $V_n(0) = 2/n$, $V_n(1) = 1/n$ (per $n > 1$) e che è indifferente dichiarare o non dichiarare.

10) (difficile) Una macchina può trovarsi in uno di due stati: funzionante (F) o guasta (G). All'inizio di ogni giornata la macchina produce oggetti che possono essere difettosi o non difettosi. La probabilità di produrre un oggetto difettoso è p_1 se lo stato è F e p_2 se lo stato è G ($p_2 > p_1$). Se la macchina è nello stato G vi rimane finché non viene sostituita. Se è invece nello stato F, il giorno seguente sarà nello stato G con probabilità γ. Ogni giorno si ispezionano gli oggetti prodotti e bisogna decidere se sosituire o no la macchina. La sostituzione costa S mentre il costo di produrre un oggetto difettoso è C. Di che tipo è la politica ottima ad orizzonte infinito (con fattore di sconto λ)?

Si calcoli la politica ottima per i valori $C = 10$, $S = 5$, $p_1 = 0.02$, $p_2 = 0.2$, $\gamma = 0.05$, $\lambda = 0.95$.

(suggerimento: In ogni giornata si può decidere di sostituire la macchina (azione 1) oppure no (azione 0). Si noti che lo stato della macchina non è osservabile e quindi non ci si può basare sullo stato della macchina per decidere se sostituirla o meno. È nota invece la probabilità p che la macchina sia in G ed è ovviamente noto ed osservabile se l'oggetto ispezionato è difettoso (D) o buono (B). Quindi conviene usare come stato la coppia (A, p) dove A può essere D o B e p può assumere il continuo dei valori fra 0 e 1. Più esattamente sia p la probabilità che risulta dopo aver osservato lo stato A. Questa probabilità viene modificata dalla successiva osservazione dei pezzi prodotti e dal decadimento naturale della macchina espressa dalla probabilità γ.)

Soluzione

In ogni giornata si può decidere di sostituire la macchina (azione 1) oppure no (azione 0). Si noti che lo stato della macchina non è osservabile e quindi non ci si può basare sullo stato della macchina per decidere se sostituirla o meno. È nota invece la probabilità p che la macchina sia in G ed è ovviamente noto ed osservabile se l'oggetto ispezionato è difettoso (D) o buono (B). Quindi conviene usare come stato la coppia (A, p) dove A può essere D o B e p può assumere il continuo dei valori fra 0 e 1. Più esattamente sia p la probabilità che risulta dopo aver osservato lo stato A. Questa probabilità viene modificata dalla successiva osservazione dei pezzi prodotti e dal decadimento naturale della macchina espressa dalla probabilità γ.

Per quel che riguarda il decadimento naturale la probabilità p di macchina guasta si modifica in $p+(1-p)\,\gamma$ (probabilità che sia già guasta dal giorno prima più la probabilità che si guasti durante la giornata).

Per quel che riguarda la variazione della probabilità in seguito all'ispezione si fa uso del Teorema di Bayes Si ha allora, a seconda dell'esito dell'ispezione:

$$\Pr\{G|B\} = \frac{\Pr\{B|G\}\ \Pr\{G\}}{\Pr\{B\}} = \frac{(1-p_2)\Pr\{G\}}{\Pr\{B\}}; \quad \Pr\{G|D\} = \frac{\Pr\{D|G\}\ \Pr\{G\}}{\Pr\{D\}} = \frac{p_2 \Pr\{G\}}{\Pr\{D\}}$$

dove

$$\Pr\{G\} = p + \gamma\,(1-p)$$

$$\Pr\{F\} = (1-p)\,(1-\gamma)$$

$$\Pr\{B\} = \Pr\{B|G\}\ \Pr\{G\} + \Pr\{B|F\}\ \Pr\{F\} = (1-p_2)\,(p+\gamma\,(1-p)) + (1-p_1)\,(1-p)\,(1-\gamma)$$

$$\Pr\{D\} = \Pr\{D|G\}\ \Pr\{G\} + \Pr\{D|F\}\ \Pr\{F\} = p_2\,(p+\gamma\,(1-p)) + p_1\,(1-p)\,(1-\gamma)$$

Allora, se non si sostituisce la macchina (azione (0)), le probabilità di transizione $P_0((A,p),(A',p'))$ sono:

$$P_0((A,p),(B,p')) = \begin{cases} \Pr\{B\} & \text{se } p' = \dfrac{(1-p_2)\Pr\{G\}}{\Pr\{B\}} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$P_0((A,p),(D,p')) = \begin{cases} \Pr\{D\} & \text{se } p' = \dfrac{p_2 \Pr\{G\}}{\Pr\{D\}} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove i valori $\Pr\{G\}$, $\Pr\{B\}$, $\Pr\{D\}$ sono quelli precedentemente calcolati. Si indichi

$$f_B(p) := \frac{(1-p_2)\Pr\{G\}}{\Pr\{B\}} = \frac{(1-p_2)\,(p+\gamma\,(1-p))}{(1-p_2)\,(p+\gamma\,(1-p)) + (1-p_1)\,(1-p)\,(1-\gamma)} =$$

$$= \frac{\gamma\,(1-p_2) + p\,(1-\gamma)\,(1-p_2)}{1-p_1-\gamma\,(p_2-p_1) - p\,(1-\gamma)(p_2-p_1)}$$

Si tratta di una funzione crescente nell'intervallo $[0,1]$ (maggiore la probabilità di macchina guasta in un giorno, maggiore la probabilità il giorno seguente). Si noti che $f_B(1) = 1$ (cioè se la macchina è guasta in un giorno è certamente guasta anche il giorno dopo) e che $f_B(0) = \gamma\,(1-p_2)/(1-p_1-\gamma\,(p_2-p_1))$. Quindi anche se la macchina è certamente funzionante, ad esempio una machina nuova, a causa del decadimento naturale la probabilità che sia guasta il giorno dopo è maggiore di 0 (se c'è decadimento, cioè $\gamma > 0$).

Si indichi

$$f_D(p) := \frac{p_2 \Pr\{G\}}{\Pr\{D\}} = \frac{p_2\,(p+\gamma\,(1-p))}{p_2\,(p+\gamma\,(1-p)) + p_1\,(1-p)\,(1-\gamma)} =$$

$$= \frac{\gamma\, p_2 + p\, p_2\,(1-\gamma)}{p_1 + \gamma\,(p_2-p_1) + p\,(1-\gamma)\,(p_2-p_1)}$$

Anche $f_D(p)$ è una funzione crescente sull'intervallo $[0,1]$. Si ha $f_D(1) = 1$ e $f_D(0) = \gamma\, p_2/(p_1+\gamma\,(p_2-p_1))$.

Se invece si sostituisce la macchina (azione (1)) le probabilità di transizione sono date dalle stesse formule ponendo $p = 0$ (essendo la macchina nuova e quindi certamente nello stato F). In questo caso si ha $\Pr\{G\} = \gamma$, $\Pr\{F\} = 1-\gamma$, $\Pr\{B\} = (1-p_2)\,\gamma + (1-p_1)\,(1-\gamma)$, $\Pr\{D\} = p_2\,\gamma + p_1\,(1-\gamma)$ e quindi

$$P_1((A,p),(B,p')) = \begin{cases} (1-p_2)\,\gamma + (1-p_1)\,(1-\gamma) & \text{se } p' = \dfrac{(1-p_2)\,\gamma}{(1-p_2)\,\gamma + (1-p_1)\,(1-\gamma)} = f_B(0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$P_1((A,p),(D,p')) = \begin{cases} p_2\,\gamma + p_1\,(1-\gamma) & \text{se } p' = \dfrac{p_2\,\gamma}{p_2\,\gamma + p_1\,(1-\gamma)} = f_D(0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

L'equazione ricorsiva di Bellman è allora

$$V((A,p)) = \min \left\{ \begin{array}{l} (p\,p_2 + (1-p)\,p_1)\,C + \\ \lambda\, P_0((A,p),(B,p'))\, V((B, f_B(p))) + \lambda\, P_0((A,p),(D,p'))\, V((D, f_D(p))); \\ \\ S + \lambda\, P_1((A,p),(B,p'))\, V((B, f_B(0))) + \lambda\, P_1((A,p),(D,p'))\, V((D, f_D(0))) \end{array} \right\}$$

dove A può essere sia B che D. Allora $V(A,p)$ non dipende da A e possiamo riscrivere

$$V(p) = \min \left\{ \begin{array}{l} (p\,p_2 + (1-p)\,p_1)\,C + \\ \lambda\, P_0((A,p),(B,p'))\, V(f_B(p)) + \lambda\, P_0((A,p),(D,p'))\, V(f_D(p)); \\ \\ S + \lambda\, P_1((A,p),(B,p'))\, V(f_B(0)) + \lambda\, P_1((A,p),(D,p'))\, V(f_D(0)) \end{array} \right\}$$

ovvero

$$V(p) = \min \left\{ \begin{array}{l} (p\, p_2 + (1-p)\, p_1)\, C + \\ \lambda\, ((1-p_2)\, (p + \gamma\, (1-p)) + (1-p_1)\, (1-p)\, (1-\gamma))\, V(f_B(p)) + \\ \lambda\, (p_2\, (p + \gamma\, (1-p)) + p_1\, (1-p)\, (1-\gamma))\, V(f_D(p)); \\ \\ S + \\ \lambda\, ((1-p_2)\, \gamma + (1-p_1)\, (1-\gamma))\, V(f_B(0)) + \\ \lambda\, (p_2\, \gamma + p_1\, (1-\gamma))\, V(f_D(0)) \end{array} \right\}$$

Il primo dei due termini si può scrivere come

$$g_0(p) := a + b\, p + (c - d\, p)\, V(f_B(p)) + (e + d\, p)\, V(f_D(p))$$

dove i coefficienti a, b, c, d, e sono tutti positivi. Siccome $f_D(p) > f_B(p)$ e assumendo $V(p)$ non decrescente (in base alla natura del problema) si ha che $g_0(p)$ è crescente. Il secondo dei due termini è una costante che non dipende da p e che indichiamo con g_1.

Se avviene che $g_0(1) < g_1$ allora la politica ottima è di non sostituire mai la macchina anche se si sa che è guasta. In questo caso si avrebbe $V(1) = g_0(1) = p_2\, C + \lambda\, V(1)$, cioè $V(1) = p_2\, C/(1-\lambda)$ (il costo di produrre oggetti difettosi scontato sull'orizzonte infinito) e quindi si avrebbe anche che $g_1 > p_2\, C/(1-\lambda)$. Ad esempio, se $S > p_2\, C/(1-\lambda)$, certamente la politica ottima è di non sostituire mai la macchina.

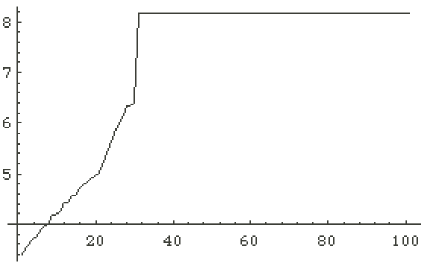
Se avviene che $g_0(0) > g_1$ allora la politica ottima è di sostituire la macchina in ogni giornata. Si noti che $g_0(0) > g_1$ se e solo se $p_1\, C > S$, cioè se il costo di produrre un oggetto difettoso è superiore al costo di una nuova macchina.

Negli altri casi c'è una valore $\hat{p}$ tale che $g_0(\hat{p}) = g_1$ e la politica ottima è di sostituire la macchina non appena $p > \hat{p}$. Per il calcolo di $\hat{p}$ si può adottare un'iterazione sulla politica. Siccome una poitica ottima può essere assegnata semplicemente fornendo il valore di soglia $\hat{p}$, assumiamo come politica generica π_q una politica che decida per la sostituzione se e solo se $\Pr\{G\} = p > q$. Per valutare il valore V_q della politica π_q si possono discretizzare i valori di p in modo da risolvere il sistema lineare $(I - \lambda\, P_q)\, V_q = r_q$, dove P_q è la matrice di transizione dovuta alla politica π_q e r_q è il vettore dei costi con la politica π_q. Ad esempio, discretizzando p ad intervalli di 0.1, e ponendo $q = 0.5$ si otterrebbe (con i dati del problema):

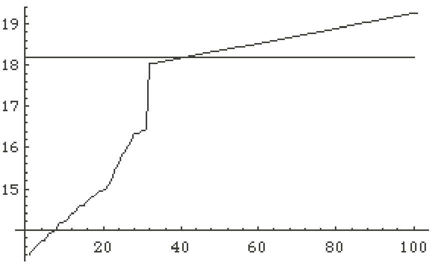
$$P = \begin{pmatrix} 0.971 & 0 & 0 & 0.029 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9539 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0461 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9368 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0632 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9197 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0803 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9026 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0974 & 0 \\ 0.971 & 0 & 0 & 0.029 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.971 & 0 & 0 & 0.029 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.971 & 0 & 0 & 0.029 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.971 & 0 & 0 & 0.029 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.971 & 0 & 0 & 0.029 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.971 & 0 & 0 & 0.029 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r = (\, 0.2 \quad 0.38 \quad 0.56 \quad 0.74 \quad 0.92 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5\,)$$

Per un calcolo più esatto conviene discretizzare in modo più fine, ad esempio 0.01. Ponendo inizialmente $q = 0.3$ si ha

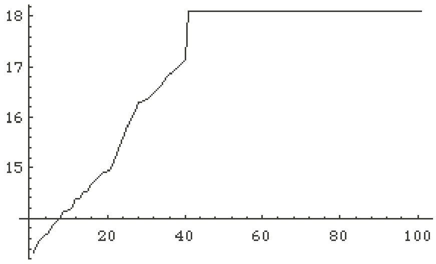


$V_q(p)$

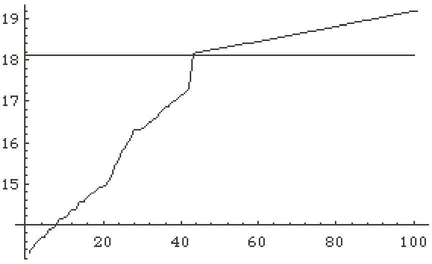


$g_0(p)$ vs. $g1$

Confrontando $g_0(p)$ e $g1$ si vede che la politica che migliora quella proposta con $q = 0.3$ sposta la probabilità di soglia a $q = 0.4$, da cui si ottiene



$V_q(p)$



$g_0(p)$ vs. $g1$

da cui si ottiene $q = 0.42$. Con altre due iterazioni si ottiene l'ottimo per $q = 0.46$.

11) Il ragazzino stava osservando la madre mentre questa riponeva i piatti puliti sulla pila di piatti dentro la credenza e non poté trattenersi dal dirle: ‘Se togli ogni volta i piatti che stanno di sopra, succede che quelli che stanno di sotto non verranno mai usati, mentre sarebbe meglio se fossero usati tutti allo stesso modo.’ La madre che era abituata a questo tipo di critiche del figlio non si scompose molto e replicò tranquillamente: ‘Sarebbe come dici tu se prendessi ogni volta lo stesso numero di piatti, però, come avrai notato, c’è sempre un numero diverso di persone a tavola e quindi prima o dopo i piatti vengono usati tutti.’ ‘Si, però - si permise di osservare ancora il ragazzino - chissà quando verranno presi quelli in fondo. È così raro che ci siano dodici persone a tavola!’. ‘Sai cosa? - tagliò corto la madre - aspettiamo che torni dall’università tua sorella. Lei studia matematica e, se non le regalano i voti, saprà forse dirci qualcosa.’

E così, quando alla sera furono tutti a tavola, il fratellino propose alla sorella il quesito già posto alla madre e, mentre stava spiegando, già la sorella cominciava a guardar per aria assorta nei pensieri, finché si lasciò sfuggire un: ‘Ah si, una catena di Markov!’ ‘Cosa!? Marco ha anche una catenina adesso, non gli basta l’orecchino?’ Subito intervenne la madre più infastidita che sbalordita. ‘No mamma, non preoccuparti, questo Markov non lo conosco personalmente...’ La figlia, se poteva essere ironica con la madre, non se ne lasciava sfuggire l’occasione, poi chiese soltanto: ‘A tavola ci può essere un numero qualsiasi di persone?’ e alla risposta ‘Si, da uno a dodici’ si immerse nei suoi pensieri, senza accorgersi dei sorrisini canzonatori che madre e figlio si scambiavano nei suoi confronti. Ma, dopo poco tempo, la ragazza annunciò trionfante: ‘È molto semplice e si vede subito che la probabilità stazionaria per un piatto generico di occupare una certa posizione nella pila è uguale per tutte le posizioni.’ ‘E cosa vuol dire quello che hai detto?’ chiese impressionato il fratello. ‘Eh, mi dispiace, vuol dire che ha ragione la mamma. Però dovrei ancora vedere in quanto tempo si raggiunge questa probabilità. A mente mi pare di intuire la risposta, ma ho bisogno di carta e matita per trovarlo esattamente’. E sparì nella sua stanza. Dopo un’ora tornò fuori tutta contenta e disse le seguenti frasi, totalmente incomprensibili agli altri: ‘Se si assume una probabilità uniforme di persone a tavola e se si assume che i piatti vengano rimessi a posto in un ordine casuale e uniforme rispetto a quando sono stati prelevati, allora gli autovalori della matrice di probabilità di transizione sono k/n, $k = 1, \dots, n$, e quindi, essendo il secondo autovalore $(n-1)/n$, la velocità di convergenza è abbastanza elevata anche con $n = 12$.’

Sapreste fare anche voi questi calcoli?

Soluzione: Considerato un piatto in particolare, la sua posizione nella pila sia lo stato di una catena di Markov. Se ci sono k persone a tavola le probabilità di transizione sono date dalla seguente matrice

$$P_k := \begin{pmatrix} 1/k & 1/k & \dots & 1/k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1/k & 1/k & \dots & 1/k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/k & 1/k & \dots & 1/k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

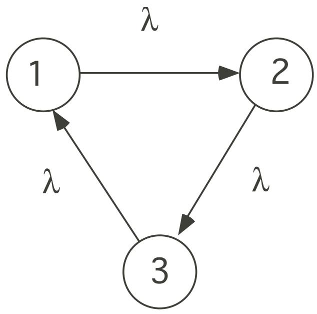
Assumendo probabilità uniforme per il numero di commensali la probabilità di transizione è

$$P = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P_k$$

P è simmetrica e quindi la probabilità stazionaria è data dalla probabilità uniforme. Per il calcolo degli autovettori si può verificare che vede ogni vettore $u^h := (\mathbf{1}_h, -h, \mathbf{0}_{n-h-1})/h$, $h = 1, \ldots, n$, con $\mathbf{1}_h$ vettore di h uni e $\mathbf{0}_h$ vettore di h zeri, è un autovettore con autovalore h/n.

Si noti che la matrice di transizione rimane simmetrica anche supponendo probabilità arbitrarie per il numero di commensali a tavola. Tuttavia il calcolo del secondo autovalore non può più essere eseguito analiticamente. Assumendo ad esempio probabilità α/k di avere k commensali (con α costante di normalizzazione) si ottiene 0.973146 come secondo autovalore, abbastanza più elevato di $0.916667 = 11/12$.

12) Si calcoli la matrice $P(t)$ per il seguente processo di Markov:



Soluzione:

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ \lambda & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

gli autovalori di Q sono

$$\alpha_0 = 0, \qquad \alpha_{-1} = (-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i)\,\lambda, \qquad \alpha_1 = (-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i)\,\lambda$$

e i corrispondenti autovettori sinistri

$$\hat{q}_0 = (1,1,1), \qquad \hat{q}_{-1} = (-2, 1 - i\sqrt{3}, 1 + i\sqrt{3}), \qquad \hat{q}_1 = (-2, 1 + i\sqrt{3}, 1 - i\sqrt{3})$$

quindi ogni soluzione di $\dot{q}(t) = q(t)\,Q$ si esprime come

$$q(t) = \sum_{k=-1}^{1} a_k\, \hat{q}_k\, e^{\alpha_k\, t}$$

con coefficienti a_k da determinare in base alle condizioni iniziali. Poniamo $q_1(0) = 1$, $q_2(0) = 0$, $q_3(0) = 0$. Quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{-1} & a_0 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 - i\sqrt{3} & 1 + i\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 + i\sqrt{3} & 1 - i\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

che dà come soluzione

$$a_{-1} = -\frac{1}{6}, \quad a_0 = \frac{1}{3}, \quad a_1 = -\frac{1}{6}$$

e allora

$$q(t) = \frac{1}{3}\,\mathbf{1} - \frac{1}{6}\,(q_{-1}\, e^{\alpha_{-1} t} + q_1\, e^{\alpha_1 t})$$

cioè

$$q(t) = \frac{1}{3}\,\mathbf{1} - \frac{1}{3}\,\mathcal{R}(q_1\, e^{\alpha_1 t})$$

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\, e^{-\frac{3}{2}\lambda t}\, \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t) \\ q_2(t) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\, e^{-\frac{3}{2}\lambda t}\, (\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t) - \sqrt{3}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t)) \\ q_3(t) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\, e^{-\frac{3}{2}\lambda t}\, (\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t) + \sqrt{3}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t)) \end{aligned}$$

Infine in base alla simmetria del processo:

$$P(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) & q_2(t) & q_3(t) \\ q_3(t) & q_1(t) & q_2(t) \\ q_2(t) & q_3(t) & q_1(t) \end{pmatrix}$$

13) Si modelli un senso unico alternato supponendo che i flussi di traffico nei due sensi siano rispettivamente di 4 macchine al minuto e di 10 macchine al minuto, assimilabili a due processi indipendenti di Poisson. Si supponga che il flusso di traffico che percorre il senso unico, ad apertura del segnale verde, sia un flusso regolare di una macchina ogni due secondi (finché ci sono macchine naturalmente) e che il tempo necessario ad una macchina per percorere il senso unico sia di 10 secondi. Il traffico sia regolato da un semaforo che sarà verde per T_1 secondi per uno dei due flussi (ad esempio quello di 10 macchine/minuto) sarà rosso per 10 secondi per entrambi i flussi (per permettere lo smaltimento del traffico), sarà verde per T_2 secondi per l'altro flusso, sarà nuovamente rosso per 10 secondi in entrambe le direzioni e così di seguito ciclicamente. Si calcolino T_1 e T_2 in modo da minimizzare i tempi medi di attesa. Si noti che la frazione di tempo utile per far passare il traffico è data da $(T_1 + T_2)/(T_1 + T_2 + 20)$ quindi la massima quantità di traffico viene smaltita quando T_1 e T_2 sono grandi in modo da rendere trascurabile l'effetto dei tempi morti (10 secondi in ogni direzione). Tuttavia in questo modo si generano code lunghe alternativamente nelle due direzioni e questo allunga i tempi medi di attesa. Il problema può essere convenientemente modellato considerando gli istanti di tempo "peggiori", cioè i momenti in cui si accende il segnale verde (e quindi la coda è più lunga) e campionando il processo negli istanti di commutazione del semaforo. Si noti che le due code costituiscono due processi indipendenti (una volta fissati i tempi di verde) e quindi possono essere analizzate separatamente. Dopo aver impostato il modello lo si risolva per via numerica e si trovi l'ottimo (dopo aver scelto soggettivamente cosa si intende per "ottimo") provando diversi valori.

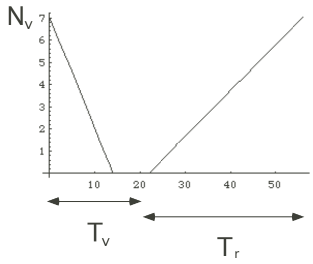
Soluzione: Si consideri uno solo dei due flussi. Siano λ il numero di macchine/secondo d'arrivo del flusso, T_v la durata del verde e T_r la durata del rosso espresse in secondi. Siccome il flusso di smaltimento del senso unico è di una macchina ogni due secondi, il numero massimo di macchine che può transitare nell'intervallo T_v è $m := \lfloor T_v/2 \rfloor$. Sia i il numero di macchine in coda all'istante in cui il semaforo diventa verde e j quando diventa rosso. Se arrivano k macchine mentre il semaforo è verde, si avrà $j = \max\{i + k - m, 0\}$ (supponiamo per semplicità che le k macchine arrivino all'inizio, in modo cioè che riescano a passare oltre se la coda è ridotta o nulla; quest'approssimazione non dovrebbe causare problemi). Se $i + k - m > 0$ allora la probabilità che $j = i + k - m$ è $(\lambda T_v)^k/k!\, e^{-\lambda T_v}$. Se $i > m$ la probabilità di avere $j < i - m$ è ovviamente nulla. Inoltre se $i \le m$ e $j = 0$ la probabilità è $\sum_{k=0}^{m-i} (\lambda T_v)^k/k!\, e^{-\lambda T_v}$. Riassumendo la matrice di transizione P_{vr} fra gli istanti di inizio verde e inizio rosso è data da:

$$P_{vr}(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i - j > m \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{m-i} \frac{(\lambda T_v)^k}{k!}\, e^{-\lambda T_v} & \text{se } j = 0 \text{ e } i \le m \\ \displaystyle\frac{(\lambda T_v)^k}{k!}\, e^{-\lambda T_v} & \text{se } j = i + k - m > 0 \end{cases}$$

La matrice di transizione P_{rv} fra gli istanti di inizio rosso e inizio verde è invece data da:

$$P_{rv}(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{se } j < i \\ \displaystyle\frac{(\lambda T_r)^k}{k!}\, e^{-\lambda T_r} & \text{se } j = i + k \end{cases}$$

Infine la matrice di transizione P fra due istanti successivi di inizio verde è data da $P = P_{vr}\, P_{rv}$. Per il calcolo numerico di P e della probabilità stazionaria bisogna fissare un numero finito $(n + 1)$ di stati. Questo comporta una correzione nel calcolo delle matrici di transizione in quanto il troncamento fa sì che $\sum_{j=0}^{n} P(i,j) < 1$. La correzione può essere fatta ad esempio ponendo $P_{vr}(i,n) = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} P_{vr}(i,j)$ e analogamente per P_{rv}. Per valutare quale valore di n usare si può procedere provando diversi valori in modo che nel calcolo della probabilità stazionaria $\bar{q}$ si abbia $\bar{q}_n$ molto piccolo (ad esempio inferiore a 10^{-3}). Calcolato $\bar{q}$ si trova il numero medio di macchine in coda all'istante di inizio verde calcolando $N_v = \sum_{i=0}^{n} i\,\bar{q}_i$. Questo valore non è tuttavia il numero medio di macchine nel sistema. Il grafico di $N(t)$ è del seguente tipo:



esemplificato qui nel caso $N_v = 7$, $T_v = 22$. La prima parte del grafico corrisponde allo svuotamento della coda (al ritmo di una macchina ogni due secondi) che avviene prima della fine del verde. All'inizio del rosso la coda si riforma fino a portarsi al valore N_v alla fine del ciclo. Il valor medio N viene valutato integrando sul ciclo, ovvero sommando le aree dei due triangoli, e dividendo per la lunghezza del ciclo. A questo punto si può applicare la legge di Little in base alla quale il tempo medio di attesa è N/λ.

Siccome le code sono due bisogna identificare una funzione obiettivo che le minimizzi entrambe. Tuttavia è chiaro che minimizzare il tempo di attesa per una coda può implicare l'allungamento dei tempi per l'altra. Un modo per affrontare il problema consiste nel valutare una media pesata dei tempi di attesa e un modo naturale di pesare le due code consiste nel tener conto dei flussi, quindi pesare il tempo di attesa moltiplicandolo per λ e quindi in definitiva minimizzare $N_1 + N_2$.

Con i dati del problema si fissi ad esempio $T_v = 30$ per un flusso e $T_v = 12$ per l'altro e quindi il ciclo è lungo 62 secondi. Consideriamo il primo flusso per il quale si ha $T_v = 30$, $T_r = 32$, $m = 15$. Si assuma il valore $n = 18$ che risulta a posteriori accettabile. Con questi valori si trovano le seguenti matrici di transizione (qui riportate con valori arrotondati)

$$P_{vr} = 0.01 \begin{pmatrix}
100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
99 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
99 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
97 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
93 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
87 & 7 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
76 & 10 & 7 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
62 & 15 & 10 & 7 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
44 & 18 & 15 & 10 & 7 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
27 & 18 & 18 & 15 & 10 & 7 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
12 & 14 & 18 & 18 & 15 & 10 & 7 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 8 & 14 & 18 & 18 & 15 & 10 & 7 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 3 & 8 & 14 & 18 & 18 & 15 & 10 & 7 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 3 & 8 & 14 & 18 & 18 & 15 & 10 & 7 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 3 & 8 & 14 & 18 & 18 & 15 & 10 & 7 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 8 & 14 & 18 & 18 & 15 & 10 & 7 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$P_{rv} = 0.01 \begin{pmatrix}
0 & 3 & 7 & 12 & 16 & 17 & 15 & 12 & 8 & 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 7 & 12 & 16 & 17 & 15 & 12 & 8 & 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 12 & 16 & 17 & 15 & 12 & 8 & 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 12 & 16 & 17 & 15 & 12 & 8 & 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 12 & 16 & 17 & 15 & 12 & 8 & 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 12 & 16 & 17 & 15 & 12 & 8 & 5 & 2 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 12 & 16 & 17 & 15 & 12 & 8 & 5 & 2 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 12 & 16 & 17 & 15 & 12 & 8 & 5 & 2 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 12 & 16 & 17 & 15 & 12 & 8 & 5 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 12 & 16 & 17 & 15 & 12 & 8 & 9 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 12 & 16 & 17 & 15 & 12 & 17 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 12 & 16 & 17 & 15 & 29 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 12 & 16 & 17 & 44 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 12 & 16 & 62 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 12 & 78 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 90 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 97 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100
\end{pmatrix}$$

$$P = 0.01 \begin{pmatrix}
0 & 3 & 7 & 12 & 16 & 17 & 15 & 12 & 8 & 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 3 & 7 & 12 & 16 & 17 & 15 & 12 & 8 & 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 3 & 7 & 12 & 16 & 17 & 15 & 12 & 8 & 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 3 & 7 & 12 & 16 & 17 & 15 & 12 & 8 & 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 3 & 7 & 12 & 16 & 17 & 15 & 12 & 8 & 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 3 & 7 & 12 & 16 & 17 & 15 & 12 & 8 & 5 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 3 & 7 & 12 & 16 & 17 & 15 & 12 & 8 & 5 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 7 & 12 & 16 & 17 & 15 & 12 & 8 & 5 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 6 & 11 & 15 & 17 & 15 & 12 & 9 & 5 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 6 & 10 & 14 & 16 & 15 & 13 & 9 & 6 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 5 & 9 & 13 & 15 & 15 & 13 & 10 & 7 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 4 & 7 & 11 & 13 & 14 & 13 & 11 & 9 & 6 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 5 & 8 & 11 & 13 & 13 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 8 & 11 & 12 & 13 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 6 & 8 & 11 & 12 & 12 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 6 & 8 & 10 & 12 & 12 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 3 & 2 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 6 & 8 & 10 & 12 & 12 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 3 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 6 & 8 & 10 & 12 & 12 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 6 & 8 & 10 & 12 & 12 & 12 & 10 & 8 & 6 & 10
\end{pmatrix}$$

Calcolando P^n si ottiene la seguente probabilità limite

$$\bar{q} = 0.01 \, \{3, 10, 17, 20, 18, 13, 8, 5, 2, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\})$$

che fornisce $N_{v1} = 5.5$. L'analogo calcolo per l'altro flusso porta a $N_{v2} = 3.7$. Eseguendo il calcolo dei valori medi N_1 e N_2 per vari valori di T_{v1} e T_{v2} si ottiene la seguente tabella dove si riportano i valori di $N_1 + N_2$ per $T_{v1} = 18, 20, \ldots, 34$ e $T_{v2} = 8, 10, \ldots, 16$. Come si vede i valori minimi si ottengono quando $T_{v1}/T_{v2} = \lambda_1/\lambda_2$. Globalmente il valore minimo si ottiene per $T_{v1} = 30$ e $T_{v2} = 12$.

*	8	10	12	14	16
18	4.42	4.65	5.35	*	*
20	4.18	4.03	4.36	*	*
22	4.25	3.79	3.93	4.24	4.67
24	4.52	3.71	3.73	3.93	4.21
26	*	3.71	3.64	3.77	3.97
28	*	3.79	3.62	3.69	3.85
30	*	3.91	3.62	3.66	3.78
32	*	*	3.66	3.65	*
34	*	*	*	3.66	*

14) Si consideri il seguente gioco (variante del sette e mezzo): si tira un dado un certo numero di volte; prima di ogni tiro si può decidere se rinunciare o tirare ancora. Se si rinuncia si guadagna la somma dei punti fatti in tutti i tiri. Se si tira ancora e la somma dei punti fatti (incluso il tiro appena fatto) supera 6 il gioco finisce e non si guadagna niente. Trovare la strategia che massimizza il guadagno atteso.

Si generalizzi al caso in cui un meccanismo aleatorio produce un numero intero uniformemente distribuito tra 1 e n e la somma da non superare è n. Calcolare i valori asintotici.

Soluzione: Si può modellare il gioco con un sistema Markoviano di decisione. Gli stati sono le somme dei punti fatti. Inoltre c'è lo stato corrispondente alla fine del gioco, indicato $*$, quindi $S = \{0, 1, \ldots, 6, *\}$. In ogni stato s, tranne $*$, le decisioni possibili sono due, abbandonare (A) oppure continuare (C). Se si abbandona, la ricompensa vale s. Se si continua la ricompensa attesa è $\sum_{i>s} u(i)/6$.

Calcolando la politica ottima per induzione all'indietro si ha:

— $s = 6$; la decisione ottima è $d^*(6) = A$ con valore $u^*(6) = 6$;

— $s = 5$; $r(A) = 5$ e $r(C) = 6/6 = 1$. Quindi $d^*(5) = A$ con valore $u^*(5) = 5$;

— $s = 4$; $r(A) = 4$ e $r(C) = (5 + 6)/6 = 11/6$. Quindi $d^*(4) = A$ con valore $u^*(4) = 4$;

— $s = 3$; $r(A) = 3$ e $r(C) = (4 + 5 + 6)/6 = 15/6$. Quindi $d^*(3) = A$ con valore $u^*(3) = 3$;

— $s = 2$; $r(A) = 2$ e $r(C) = (3 + 4 + 5 + 6)/6 = 18/6$. Quindi $d^*(2) = C$ con valore $u^*(2) = 3$;

— $s = 1$; $r(A) = 1$ e $r(C) = (3 + 3 + 4 + 5 + 6)/6 = 21/6$. Quindi $d^*(1) = C$ con valore $u^*(1) = 3.5$;

— $s = 0$; $r(A) = 0$ e $r(C) = (3.5+3+3+4+5+6)/6 = 24.5/6$. Quindi $d^*(0) = C$ con valore $u^*(1) = 4.0833$;

Quindi la strategia ottima consiste nell'abbandonare non appena la somma supera 2. Il valore ottimo atteso è 4.0833.

Nel caso generale si tratta di valutare il più piccolo valore intero z tale che

$$z > \frac{\sum_{k=z+1}^{n} k}{n}$$

Cioè

$$n\,z > \frac{n\,(n+1)}{2} - \frac{z\,(z+1)}{2}$$

che porta a

$$z^2 + (2\,n+1)\,z - n\,(n+1) > 0$$

da cui

$$z > (n + \frac{1}{2})\,(\sqrt{2} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{4\,(2\,n+1)^2})$$

per cui la strategia ottima consiste nel continuare solo se la somma non supera

$$s := \left\lfloor (n + \frac{1}{2})\,(\sqrt{2} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{4\,(2\,n+1)^2}) \right\rfloor \approx \left\lfloor (n + \frac{1}{2})\,(\sqrt{2} - 1) \right\rfloor$$

Per il calcolo del valore ottimo si noti che $u^*(k) = k$ se $k > s$ e $u^*(s) = \sum_{k>s} k/n =: U$. Per gli altri stati si ha

$$u^*(s-1) = \frac{1}{n}\,(u^*(s) + n\,U) = (1 + \frac{1}{n})\,U$$

$$u^*(s-2) = \frac{1}{n}\,(u^*(s-1) + u^*(s) + n\,U) = \frac{1}{n}\,(u^*(s-1) + n\,u^*(s-1)) = (1+\frac{1}{n})\,u^*(s-1) = (1+\frac{1}{n})^2\,U$$

e si trova che

$$u^*(0) = (1+\frac{1}{n})^s\,U$$

Asintoticamente si ha

$$u^*(0) = e^{\sqrt{2}-1}(\sqrt{2}-1)\,n.$$

15) Si consideri una coda $M/M/1$ e si ricavi la matrice di transizione della catena relativa agli istanti di arrivo di un cliente e si verifichi che la probabilità stazionaria della catena nello stato k (stato che corrisponde all'arrivo di un cliente quando nel sistema vi sono $k-1$ clienti) è la medesima del processo nello stato $k-1$ (probabilità generica che vi siano $k-1$ clienti nel sistema e cioè $\rho^{k-1}(1-\rho)$). Suggerimento: la catena immersa (cioè quella relativa a tutte le transizioni e non soltanto a quelle in salita) ha probabilità di transizione $\lambda/(\lambda+\mu)$ verso l'alto e $\mu/(\lambda+\mu)$ verso il basso (attenzione allo stato 0!). Si indichi $\alpha := \mu/(\lambda+\mu)$ e si ragioni sulle transizioni "visibili" dalla catena del processo campionato agli arrivi (di nuovo attenzione allo stato 0!).

Soluzione

Siccome si vuole campionare il processo solo agli istanti di arrivo, tutte le transizioni verso stati più bassi sono "invisibili" e solo le transizioni da uno stato a quello successivo sono visibili. Quindi lo stato 0 è invisibile per la catena (non ci si può mai arrivare dal basso). Trovandosi il processo in un generico stato i, il processo può: operare una transizione verso $i+1$ (che viene vista dalla catena), oppure una transizione verso $i-1$ (invisibile) e successivamente una verso i (visibile), oppure una verso $i-1$ ed un'altra verso $i-2$ (entrambe invisibili) seguite da una verso $i-1$ (visibile), eccetera.

Siccome la probabilità di una transizione verso il basso è $\mu/(\lambda+\mu) =: \alpha$ e quella verso l'alto è $\lambda/(\lambda+\mu) = 1-\alpha$ (tranne che per lo stato 0 dove vale 1), si ha $P(i,i+1) = 1-\alpha$, $P(i,i) = \alpha\,(1-\alpha)$, $P(i,i-1) = \alpha^2\,(1-\alpha)$, ecc. Abbiamo allora

$$P(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{se } j > i+1 \\ \alpha^i & \text{se } j = 1 \\ \alpha^{i-j+1}\,(1-\alpha) & \text{se } 1 < j \le i+1 \end{cases}$$

Verifichiamo che $\sum_{j\ge 1} P(i,j) = 1$.

$$\sum_{j\ge 1} P(i,j) = \alpha^i + \sum_{j\ge 2}^{i+1} \alpha^{i-j+1}\,(1-\alpha) = \alpha^i + (1-\alpha)\sum_{k=0}^{i-1}\alpha^k = \alpha^i + (1-\alpha)\,\frac{1-\alpha^i}{1-\alpha} = 1$$

La probabilità stazionaria $\bar{q}$ deve soddisfare $\bar{q} = \bar{q}\,P$ e quindi

$$\bar{q}_j = \sum_{i\ge 1} \bar{q}_i\,P(i,j) = \sum_{i\ge j-1} \bar{q}_i\,\alpha^{i-j+1}\,(1-\alpha), \qquad j > 1$$

$$\bar{q}_1 = \sum_{i\ge 1} \bar{q}_i\,P(i,1) = \sum_{i\ge 1} \bar{q}_i\,\alpha^i,$$

Verifichiamo che $\bar{q}_i = \rho^{i-1}\,(1-\rho)$. Siccome $\rho := \lambda/\mu$ e $\alpha := \mu/(\lambda+\mu)$, $\alpha = 1/(1+\rho)$ e quindi:

$$\sum_{i\ge j-1} \bar{q}_i\,\alpha^{i-j+1}\,(1-\alpha) = \sum_{i\ge j-1} \rho^{i-1}\,(1-\rho)\,\frac{\rho}{(1+\rho)^{i-j+2}} = \sum_{i\ge j-1} \frac{\rho^i}{(1+\rho)^{i-j+1}} =$$

$$= \rho^{j-1}\sum_{i\ge j-1} \frac{\rho^{i-j+1}}{(1+\rho)^{i-j+1}} = \rho^{j-1}\sum_{k\ge 0}\frac{\rho^k}{(1+\rho)^k} = \rho^{j-1}\,\frac{1}{1-\dfrac{\rho}{1+\rho}} = \rho^{j-1}\,(1-\rho) = \bar{q}_j$$

e analogamente si verifica per $j = 1$.

16) Si consideri un processo markoviano con stati $0, 1, \ldots, n$ e transizioni $k \to k+1$ di frequenza λ_k e $k \to k-1$ di frequenza μ_k. Si ricavi la matrice di transizione della catena che si ottiene campionando il processo agli istanti di transizione verso l'alto soltanto (si ragiona come nel caso precedente). Si calcoli la probabilità stazionaria della catena per il caso particolare $\lambda_k = \mu_k = 1$. È la medesima del processo?

Soluzione

Come nel caso precedente lo stato 0 è invisibile per la catena. Per ogni stato k, $k \neq 0$ e $k \neq n$, le probabilità di transizione per la catena immersa sono verso il basso $\mu_k/(\lambda_k+\mu_k) =: \alpha_k$ e verso l'alto è $\lambda_k/(\lambda_k+\mu_k) = 1-\alpha_k$ (allora $\alpha_n = 1$ e $\alpha_0 = 0$). Con gli stessi ragionamenti del caso precedente si ha:

$$P(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{se } j > i+1 \\ \prod_{k=j}^{i} \alpha_k \, (1-\alpha_{j-1}) & \text{se } j \leq i+1 \end{cases}$$

dove per convenzione $\prod_{k=j}^{i} \alpha_k = 1$ se $i < j$. Verifichiamo che $\sum_{j \geq 1} P(i,j) = 1$.

$$\sum_{j\geq 1} P(i,j) = \sum_{j=1}^{i+1} \prod_{k=j}^{i} \alpha_k \, (1-\alpha_{j-1}) = \sum_{j=1}^{i+1} (1-\alpha_{j-1}) \prod_{k=j}^{i} \alpha_k = \sum_{j=1}^{i+1} \prod_{k=j}^{i} \alpha_k - \sum_{j=1}^{i+1} \prod_{k=j-1}^{i} \alpha_k =$$

$$= \sum_{j=1}^{i+1} \prod_{k=j}^{i} \alpha_k - \sum_{j=0}^{i} \prod_{k=j}^{i} \alpha_k = \prod_{k=i+1}^{i} \alpha_k - \prod_{k=0}^{i} \alpha_k = 1 - 0 = 1$$

Se $\lambda_k = \mu_k = 1$ si ha $\alpha_k = 1/2$ (però $\alpha_0 = 0$ e $\alpha_n = 1$) e quindi

$$P(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{se } j > i+1 \\ (1/2)^i & \text{se } j = 1,\ i < n \\ (1/2)^{n-1} & \text{se } j = 1,\ i = n \\ (1/2)^{i-j+2} & \text{se } 1 < j \leq i+1,\ i < n \\ (1/2)^{n-j+1} & \text{se } 1 < j,\ i = n \end{cases}$$

Ad esempio per $n = 5$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Come si vede facilmente invertendo l'ordine delle righe si ottiene una matrice simmetrica e quindi la probabilità stazionaria è costante. È immediato vedere che è la stessa del processo.

17) Si consideri una coda $M/M/m/n$ in cui vi è una popolazione finita (di valore n) che accede al servizio (con m servitori) e la frequenza degli arrivi è proporzionale alla popolazione non nel sistema. Si calcolino in modo numerico le probabilità stazionarie del processo per i valori $n = 8$, $m = 3$ e $\lambda = \mu = 1$. Si calcolino in modo numerico le probabilità stazionarie della catena ottenuta campionando il processo agli istanti di transizione verso l'alto, per gli stessi valori. Si valutino W e T.

Soluzione

Ragionando come nel caso precedente si ha $\lambda_k = (n-k)\,\lambda$ e $\mu_k = k\,\mu$ se $k < m$ e $\mu_k = m\,\mu$ se $k \geq m$. Applicando le formule precedenti con i valori indicati si ottiene

$$P = \begin{pmatrix} 0.12 & 0.88 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.031 & 0.22 & 0.75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.012 & 0.082 & 0.28 & 0.63 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.005 & 0.035 & 0.12 & 0.27 & 0.57 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0025 & 0.018 & 0.06 & 0.13 & 0.29 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.0015 & 0.011 & 0.036 & 0.08 & 0.17 & 0.3 & 0.4 & 0 \\ 0.0011 & 0.0079 & 0.027 & 0.06 & 0.13 & 0.22 & 0.3 & 0.25 \\ 0.0011 & 0.0079 & 0.027 & 0.06 & 0.13 & 0.22 & 0.3 & 0.25 \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene (i valori indicati sono arrotondati)

$$\bar{q} = (0.005, 0.035, 0.11, 0.18, 0.23, 0.23, 0.16, 0.052)$$

$\bar{q}_k$ $(k = 1, \ldots, 8)$ è la probabilità che il cliente in arrivo trovi $k-1$ persone nel sistema. Quindi il tempo medio in attesa W si calcola tenendo conto che sarà 0 se il sistema è nello stato 1,2 o 3 (della catena). Altrimenti è $(k-m)/(m\,\mu)$ se il sistema è nello stato $k \geq m$. Si tratta di calcolare:

$$W = \sum_{k=m+1}^{n} \bar{q}_k \, \frac{k-m}{m\,\mu} = 0.745$$

e quindi $T = 1.745$.

18) Usando i precedenti risultati si modelli e risolva il seguente problema: In una fabbrica ci sono n macchine soggette ogni tanto a dei guasti. La perdita oraria di produttività a causa dell'inattività di una qualsiasi macchina sia c. Per la riparazione delle macchine si pensa di predisporre una squadra di m meccanici il cui costo orario è w (sia che siano attivi o no). Si supponga che ogni macchina sia soggetta a guasti secondo un processo di Poisson di frequenza λ e che la durata di ogni riparazione sia anche di Poisson con valor medio $1/\mu$. Si imposti il problema di determinare m in modo da minimizzare i costi. Si risolva con i dati $n = 20$, $\lambda = 1$ guasto ogni 10 giorni per macchina, $1/\mu = 10$ ore. Il ciclo lavorativo per le macchine e per i meccanici è di 16 ore al giorno. Il costo orario di un meccanico è di 100.000 lire e la perdita per un'ora di inattività di una macchina è di 500.000 lire.

Soluzione

Il problema si può modellare come una coda $M/M/m/n$, dove $n = 20$, $\lambda = 1/(10 \cdot 16)$ (tempo misurato in ore), $\mu = 1/10$ e m è da determinare. Con questi dati si può ricavare sia il generatore infinitesimo Q del processo che la matrice di transizione P della catena markoviana campionata agli arrivi (come negli esercizi precedenti). Il problema è come identificare i costi a partire dai parametri che descrivono l'andamento della coda. In ogni caso è conveniente assumere dei costi orari. Ci sono due possibilità alternative di calcolo.

– Da Q si calcola la probabilità stazionaria q del processo. Il significato di q_k è che per una frazione q_k del tempo vi sono k macchine inattive. Quindi mediamente il numero di macchine inattive è $\sum_{k=0}^{n} q_k \, k = N$ e se si indica con c il costo orario per ogni macchina inattiva, mediamente tale costo è $c\,N$.

– Da P si calcola la probabilità stazionaria p della catena. I valori di p permettono di calcolare il tempo medio nel sistema T. Infatti se il sistema passa nello stato k significa che vi sono $k-1$ macchine inattive nel momento del nuovo guasto. L'attesa di questa macchina è dovuta alle $k-m$ macchine in attesa di essere riparate. Quindi quando il sistema passa nello stato k vi è un'attesa pari a $(k-m)\,/(m\,\mu)$ seguita dal tempo di riparazione $(1/\mu)$. Mediamente allora

$$T = \frac{1}{\mu} + \sum_{k=m+1}^{n} p_k \, \frac{k-m}{m\,\mu}$$

Questo è il tempo medio di inattività di una macchina che si guasta. Per calcolare la frazione di tempo globale di inattività di una macchina si consideri che mediamente il tempo T di riparazione è seguito da un tempo di attività che dura $1/\lambda$. Quindi la frazione di tempo inattivo per una singola macchina è

$$\frac{T}{T + 1/\lambda}$$

e il costo orario globale è quindi

$$\frac{n\,\lambda\,T}{1 + \lambda\,T}$$

Si può verificare che

$$N = \frac{n\,\lambda\,T}{1 + \lambda\,T}$$

Si ottengono i seguenti risultati dove il costo è dato da $c\,N + w\,m$ con w costo orario di un meccanico:

m	N	T (h)	costo (KL/h)
1	5.03	53.76	2615
2	1.57	13.64	985
3	1.23	10.53	917
4	1.18	10.07	992
5	1.17	10.01	1088

e quindi il valore ottimo si ha per $m = 3$. I valori di T, ad esempio quello per $m = 2$ indica che quando una macchina si guasta aspetta mediamente 3.64 ore e poi viene riparata mediamente in 10 ore. Come si vede la situazione è insostenibile per $m = 1$: 43 ore di attesa! Squadre di più di 3 meccanici riducono praticamente a 0 il tempo d'attesa. In particolare si ottiene per $m = 3$

$$P = \begin{pmatrix}
0.46 & 0.54 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.22 & 0.26 & 0.53 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.1 & 0.12 & 0.26 & 0.52 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.052 & 0.062 & 0.13 & 0.26 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.027 & 0.032 & 0.066 & 0.13 & 0.26 & 0.48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.014 & 0.017 & 0.035 & 0.071 & 0.14 & 0.26 & 0.47 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.0079 & 0.0094 & 0.019 & 0.039 & 0.076 & 0.14 & 0.26 & 0.45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.0045 & 0.0054 & 0.011 & 0.022 & 0.043 & 0.081 & 0.15 & 0.26 & 0.43 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.0027 & 0.0032 & 0.0066 & 0.013 & 0.026 & 0.048 & 0.087 & 0.15 & 0.25 & 0.41 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.0017 & 0.002 & 0.0041 & 0.0082 & 0.016 & 0.03 & 0.054 & 0.093 & 0.16 & 0.25 & 0.38 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.0011 & 0.0013 & 0.0026 & 0.0052 & 0.01 & 0.019 & 0.034 & 0.06 & 0.1 & 0.16 & 0.25 & 0.36 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.0007 & 0.00084 & 0.0017 & 0.0035 & 0.0068 & 0.013 & 0.023 & 0.04 & 0.067 & 0.11 & 0.16 & 0.24 & 0.33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.00049 & 0.00058 & 0.0012 & 0.0024 & 0.0047 & 0.0088 & 0.016 & 0.028 & 0.046 & 0.074 & 0.11 & 0.17 & 0.23 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.00036 & 0.00042 & 0.00088 & 0.0018 & 0.0034 & 0.0064 & 0.012 & 0.02 & 0.034 & 0.054 & 0.083 & 0.12 & 0.17 & 0.22 & 0.27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.00027 & 0.00032 & 0.00067 & 0.0013 & 0.0026 & 0.0049 & 0.0088 & 0.015 & 0.026 & 0.041 & 0.063 & 0.093 & 0.13 & 0.17 & 0.21 & 0.24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.00022 & 0.00026 & 0.00053 & 0.0011 & 0.0021 & 0.0039 & 0.0071 & 0.012 & 0.021 & 0.033 & 0.051 & 0.074 & 0.1 & 0.13 & 0.17 & 0.19 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\
0.00018 & 0.00022 & 0.00045 & 0.0009 & 0.0018 & 0.0033 & 0.0059 & 0.01 & 0.017 & 0.028 & 0.043 & 0.062 & 0.087 & 0.11 & 0.14 & 0.16 & 0.17 & 0.16 & 0 & 0 \\
0.00016 & 0.00019 & 0.0004 & 0.0008 & 0.0016 & 0.0029 & 0.0053 & 0.0092 & 0.015 & 0.025 & 0.038 & 0.055 & 0.077 & 0.1 & 0.12 & 0.14 & 0.15 & 0.14 & 0.11 & 0 \\
0.00015 & 0.00018 & 0.00038 & 0.00076 & 0.0015 & 0.0028 & 0.005 & 0.0087 & 0.014 & 0.023 & 0.036 & 0.052 & 0.072 & 0.095 & 0.12 & 0.13 & 0.14 & 0.13 & 0.1 & 0.059 \\
0.00015 & 0.00018 & 0.00038 & 0.00076 & 0.0015 & 0.0028 & 0.005 & 0.0087 & 0.014 & 0.023 & 0.036 & 0.052 & 0.072 & 0.095 & 0.12 & 0.13 & 0.14 & 0.13 & 0.1 & 0.059
\end{pmatrix}$$

$$p = \big(0.31,\ 0.37,\ 0.21,\ 0.074,\ 0.025,\ 0.0077,\ 0.0022,\ 0.00061,\ 0.00015,\ 0.000035,$$
$$7.2\,10^{-6},\ 1.4\,10^{-6},\ 2.3\,10^{-7},\ 3.3\,10^{-8},\ 4.1\,10^{-9},\ 4.3\,10^{-10},\ 3.6\,10^{-11},\ 2.2\,10^{-12},\ 9.3\,10^{-14},\ 1.9\,10^{-15} \big)$$

$$q = \big(0.29,\ 0.37,\ 0.22,\ 0.081,\ 0.029,\ 0.0096,\ 0.003,\ 0.00088,\ 0.00024,\ 0.000059,\ 0.000014,$$
$$2.8\,10^{-6},\ 5.3\,10^{-7},\ 8.9\,10^{-8},\ 1.3\,10^{-8},\ 1.6\,10^{-9},\ 1.7\,10^{-10},\ 1.4\,10^{-11},\ 8.8\,10^{-13},\ 3.6\,10^{-14},\ 7.6\,10^{-16} \big)$$