

# OTTIMIZZAZIONE A INFINITE DIMENSIONI

## 1 – Spazi di Banach

1 DEFINIZIONE. *Uno spazio vettoriale è un insieme  $X$  con la seguente struttura:*

– è definita in  $X$  un'operazione somma (+) rispetto alla quale  $X$  è un gruppo commutativo il cui elemento identità viene chiamato *origine* e denotato (in questo contesto) come  $\mathbf{0}$ .

– è associato ad  $X$  un corpo  $K$  ed è definita un'operazione di moltiplicazione ( $\cdot$ ):  $K \times X \rightarrow X$ . Gli elementi del corpo vengono indicati come *scalari* e denotati (in questo contesto) con lettere greche.

– le due operazioni sono legate dalla proprietà distributiva,  $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$  e  $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$ , e da quella associativa  $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ . ■

Generalmente il corpo  $K$  è il corpo dei reali oppure quello dei complessi. Nel primo caso si parla di spazio vettoriale reale e nel secondo di spazio vettoriale complesso. I seguenti sono esempi di spazi vettoriali reali. Nel seguito tratteremo quasi esclusivamente spazi vettoriali reali per cui ometteremo l'aggettivo 'reale'.

2 DEFINIZIONE. *Due spazi vettoriali  $X$  e  $Y$  si dicono isomorfi se esiste una relazione biunivoca  $T: X \rightarrow Y$  tale che  $T(x+y) = T(x) + T(y)$  e  $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ ,  $\forall \alpha, x, y$ . ■*

3 DEFINIZIONE. *Un insieme finito di vettori  $x_1, \dots, x_n$  si dice linearmente indipendente se  $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \neq 0$  per ogni  $n$ -pla  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  che non sia tutta nulla. Un insieme infinito  $A$  di vettori si dice linearmente indipendente se ogni sottoinsieme finito di  $A$  è linearmente indipendente. Altrimenti l'insieme si dice linearmente dipendente. ■*

4 DEFINIZIONE. *Un insieme finito e linearmente indipendente  $B$  di vettori è una base per uno spazio  $X$  se ogni elemento di  $X$  si può esprimere come combinazione lineare (necessariamente unica) di elementi di  $B$ . ■*

5 DEFINIZIONE. *Spazi aventi una base (finita) si dicono finito dimensionali. Spazi che non possiedono una base finita si dicono infinito dimensionali. ■*

6 TEOREMA. *Basi diverse di un medesimo spazio finito dimensionale hanno la medesima cardinalità. ■*

Nella maggior parte delle applicazioni la struttura algebrica di spazio vettoriale è troppo povera per poter produrre risultati interessanti. Soprattutto in problemi di ottimizzazione è indispensabile introdurre altre proprietà che rappresentino la 'grandezza' di un vettore o che possano anche definire adeguatamente il concetto di convergenza. A tal fine lo spazio vettoriale viene fornito di una struttura topologica e, nei casi di maggior interesse, questa viene indotta da una norma.

7 DEFINIZIONE. Una norma su uno spazio vettoriale  $X$  è una qualsiasi funzione  $X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \|x\|$  tale che

- $\|x\| > 0$ ,  $\forall x \in X \setminus \mathbf{0}$ ;  $\|\mathbf{0}\| = 0$ ;
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ,  $\forall \alpha, \forall x \in X$ ;
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ,  $\forall x, y \in X$  (diseguaglianza triangolare). ■

8 DEFINIZIONE. Uno spazio lineare normato è uno spazio vettoriale  $X$  sul quale sia definita una particolare norma. ■

Si tenga presente che norme diverse definite sullo stesso spazio vettoriale danno luogo in generale a spazi lineari normati diversi con proprietà anche molto differenti se lo spazio è infinito dimensionale. Si noti che le proprietà della norma implicano la continuità delle operazioni di addizione e moltiplicazione dello spazio vettoriale. L'insieme  $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$  si chiama *sfera unitaria*. La seguente proprietà della norma è di immediata verifica:  $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ .

9 DEFINIZIONE. Due spazi normati si dicono isometricamente isomorfi se sono isomorfi ed inoltre  $\|T(x)\| = \|x\|$ . ■

Ricordiamo che un insieme è compatto se da ogni copertura di aperti dell'insieme è possibile estrarre una sottocopertura finita. Il seguente straordinario risultato lega assieme le strutture algebrica e topologica di uno spazio lineare normato:

10 TEOREMA. La sfera unitaria di uno spazio lineare normato è compatta se e solo se lo spazio ha dimensione finita. ■

Elenchiamo ora alcuni fra gli spazi lineari di uso più comune.

11 ESEMPIO. L'insieme dei numeri reali, con norma data dal valore assoluto. ■

12 ESEMPIO. L'insieme delle  $n$ -ple di numeri reali che viene indicato  $\mathbb{R}^n$ . Un elemento generico di  $\mathbb{R}^n$  viene indicato come  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e i vari  $x_i$  vengono indicati come componenti del vettore. L'operazione somma è definita da

$$x + y = ((x + y)_1, (x + y)_2, \dots, (x + y)_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

e l'operazione moltiplicazione da

$$\alpha x = ((\alpha x)_1, (\alpha x)_2, \dots, (\alpha x)_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

Varie norme possono venire definite su  $\mathbb{R}^n$ . Quelle più usate rientrano nella famiglia delle norme  $\|\cdot\|_p$ ,  $p \geq 1$ , definite da

$$\|x\|_p := \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Nella famiglia si include anche il caso  $p = \infty$  definito da  $\|x\|_\infty := \max_i |x_i|$ . Le norme più interessanti sono quelle con  $p = 1$ ,  $p = 2$  (norma euclidea) o  $p = \infty$ . Si noti che  $\|x\|_p \geq \|x\|_q$  se  $p < q$  quindi norme diverse 'misurano' lo stesso vettore in modo diverso (la differenza è massima per vettori con tutte le coordinate uguali). Tuttavia si può dimostrare che in  $\mathbb{R}^n$  se  $\|x_k\| \rightarrow 0$  in una certa norma allora c'è convergenza in qualsiasi altra norma. Altre norme possono essere definite ad esempio come  $\|x\| = \sqrt{(x^T Q x)}$  con  $Q$  una qualsiasi matrice positiva definita (generalizzazione della norma euclidea che corrisponde al caso di  $Q = I$ ), o più in generale come  $\|x\| = \inf \{\alpha : (1/\alpha)x \in K\}$  con  $K$  corpo convesso contenente l'origine (siccome la sfera unitaria è convessa ogni norma si può esprimere in questo modo). ■

Si noti che in virtù della possibilità di 'rappresentare' ogni elemento di uno spazio a finite dimensioni tramite l' $n$ -pla di scalari della combinazione lineare della base, ogni spazio finito dimensionale è isomorfo a  $\mathbb{R}^n$ .

13 ESEMPIO. L'insieme di tutti i polinomi di grado al più  $n - 1$  è uno spazio lineare isomorfo a  $\mathbb{R}^n$  con base  $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ . Adottando la norma  $(\int_0^1 |p^2(t)| dt)^{1/2}$  lo spazio è isometricamente isomorfo a  $\mathbb{R}^n$  con norma  $\sqrt{(x^T Q x)}$  e  $Q$  la matrice di Hilbert  $Q_{ij} = 1/(i + j - 1)$ . ■

Gli spazi degli esempi seguenti hanno tutti dimensione infinita.

14 ESEMPIO. L'insieme di tutte le successioni infinite di numeri reali con un numero finito di componenti non nulle. Le operazioni sono definite componente per componente come in  $\mathbb{R}^n$ . Anche le varie norme possono essere indotte da  $\mathbb{R}^n$ . ■

15 ESEMPIO. L'insieme di tutte le successioni infinite di numeri reali tali che  $\sum_i |x_i|^p < \infty$  con  $p \geq 1$ . Questo spazio viene indicato come  $l_p$  con norma  $(\sum_i |x_i|^p)^{1/p}$ . ■

16 ESEMPIO. L'insieme di tutte le successioni infinite di numeri reali convergenti a zero che viene indicato  $c_0$ . La norma è  $\max_i |x_i|$ . ■

17 ESEMPIO. L'insieme di tutte le successioni infinite di numeri reali convergenti che viene indicato  $c$ . La norma è  $\max_i |x_i|$ . ■

18 ESEMPIO. L'insieme di tutte le successioni infinite di numeri reali limitati superiormente. Questo spazio con norma  $\sup_i |x_i|$  viene indicato  $l_\infty$ . ■

19 ESEMPIO. L'insieme delle funzioni continue definite su intervallo limitato e chiuso  $[a, b]$  con norma definita da  $\max_{t \in [a, b]} |x(t)|$ . La somma è data da  $(x + y)(t) = x(t) + y(t)$  e la moltiplicazione da  $(\alpha x)(t) = \alpha x(t)$ . Questo spazio viene indicato  $C[a, b]$ . ■

20 ESEMPIO. L'insieme delle funzioni continue definite su intervallo limitato e chiuso  $[a, b]$  con norma definita da

$$\sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 dt}.$$

Questo spazio viene indicato  $C^2[a, b]$  ed è *diverso* da  $C[a, b]$ . ■

21 ESEMPIO. L'insieme delle funzioni definite su intervallo limitato e chiuso  $[a, b]$  tali che la funzione  $|x(t)|^p$  sia integrabile secondo Riemann con norma definita da

$$\left( \int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Questo spazio viene indicato  $R_p[a, b]$ . ■

22 ESEMPIO. L'insieme delle funzioni definite su intervallo limitato e chiuso  $[a, b]$  tali che la funzione  $|x(t)|^p$  sia integrabile secondo Lebesgue con norma definita come in  $R_p$ . Questo spazio viene indicato  $L_p[a, b]$ . ■

23 ESEMPIO. L'insieme di tutti i polinomi definiti su un intervallo  $[a, b]$  indicato come  $P[a, b]$ . Si noti che tale spazio è isomorfo allo spazio dell'esempio 14 dove la successione è data dai coefficienti del polinomio. Varie norme possono essere definite in  $P[a, b]$  indotte ad esempio dallo spazio dell'esempio 14 oppure da  $C[a, b]$  oppure da  $C^2[a, b]$ .

24 ESEMPIO. Data una funzione  $x$  su un intervallo  $[a, b]$  si consideri un sottoinsieme  $a = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n = b$  di punti (con  $n$  arbitrario) e si consideri l'espressione  $\sum_{i=1}^n |x(t_i) - x(t_{i-1})|$ . Se tale espressione è limitata superiormente per qualsiasi insieme di punti allora possiamo definire come *variazione totale* della funzione la quantità:

$$TV(x) = \sup_{t_1, \dots, t_n} \sum_{i=1}^n |x(t_i) - x(t_{i-1})|$$

Lo spazio di funzioni a variazione totale limitata su  $[a, b]$  costituisce pertanto uno spazio lineare normato con norma data da  $\|x\| = |x(a)| + TV(x)$ . Tale spazio viene indicato  $BV[a, b]$  ('bounded variation'). ■

Caratterizziamo ora brevemente alcuni tipici sottoinsiemi di spazi lineari normati.

25 DEFINIZIONE. Un sottoinsieme  $S \subset X$  tale che  $\alpha x + \beta y \in S, \forall \alpha, \beta$  se  $x, y \in S$  prende il nome di sottospazio. ■

Si noti che qualunque sia il sottospazio  $\mathbf{0} \in S$ . In base alla definizione  $X$  e  $\mathbf{0}$  sono sottospazi essi stessi. Sottospazi che siano diversi da  $X$  e da  $\mathbf{0}$  prendono il nome di sottospazi *propri*. La definizione di sottospazio si basa unicamente sulla struttura algebrica dello spazio vettoriale

26 ESEMPIO. L'insieme delle  $n$ -ple con le prime  $k$  componenti uguali a zero è un sottospazio di  $\mathbb{R}^n$ . ■

27 ESEMPIO. Lo spazio dell'esempio 14,  $l_p, c_0, c$  e  $l_\infty$  sono uno sottospazio dell'altro (nell'ordine dato). ■

28 ESEMPIO. L'insieme delle funzioni continue definite su intervallo limitato e chiuso  $[a, b]$  e tali che  $f(c) = 0$  con  $a \leq c \leq b$  è un sottospazio di  $C[a, b]$ . Un tipo diverso di sottospazio è costituito dalle funzioni derivabili su  $[a, b]$  che viene indicato come  $D[a, b]$ . Anche  $P[a, b]$  è un sottospazio di  $C[a, b]$ . ■

Di facile dimostrazione sono le seguenti proprietà:

29 TEOREMA. Se  $S$  e  $T$  sono sottospazi di  $X$ , anche  $S \cap T$  è un sottospazio di  $X$ . ■

30 TEOREMA. Se  $S$  e  $T$  sono sottospazi di  $X$ , anche  $S + T$  è un sottospazio di  $X$ . ■

Le definizioni di insiemi convessi, insiemi affini (ovvero varietà affini ovvero varietà lineari), con si estendono immediatamente da  $\mathbb{R}^n$  ad un generico spazio vettoriale.

31 ESEMPIO. Si consideri  $C[a, b]$  e siano  $f, g \in C[a, b]$  tali  $f(t) \leq g(t), \forall t \in [a, b]$ . Allora l'insieme delle funzioni continue  $h$  tali che  $f(t) \leq h(t) \leq g(t), \forall t \in [a, b]$  è un insieme convesso. Un esempio di varietà affine è costituito dalle funzioni tali che  $f(c) = d$  con  $a \leq c \leq b$  e  $d$  reali fissati. Un esempio di cono è costituito dalle funzioni a valori non negativi. ■

32 ESEMPIO. Si consideri lo spazio  $P[a, b]$  dell'esempio 23. Due esempi di cono sono costituiti dai polinomi a valori non negativi sull'intervallo  $[a, b]$  oppure dai polinomi a coefficienti non negativi. ■

Per ciò che riguarda il concetto di convergenza nella struttura topologica dello spazio lineare normato abbiamo la seguente definizione.

33 DEFINIZIONE. Una successione infinita  $\{x^k\}$  di vettori converge al vettore  $x$  se la successione di reali  $\{\|x^k - x\|\}$  converge a zero (scritto anche  $x^k \rightarrow x$ ). ■

In uno spazio a finite dimensioni una successione  $\{x^k\}$  converge se e solo se la successione di ogni singola componente  $\{x_i^k\}$  è convergente. Questa proprietà non è valida in dimensione infinita. Ad esempio sia  $e^k$  un elemento di  $l_2$  con tutte le componenti nulle tranne la  $k$ -ma che vale uno. La successione  $\{e^k\}$  non è convergente a nessun elemento di  $l_2$  anche se ogni singola componente genera una successione che tende a zero (addirittura in un numero finito di passi). Un utile criterio di convergenza è costituito dal seguente criterio:

34 DEFINIZIONE. (*criterio di Cauchy*) Una successione  $x^k$  soddisfa il criterio di Cauchy (ovvero è una successione di Cauchy) se fissato  $\varepsilon > 0$  esiste un intero  $n$  tale che  $\|x^k - x^h\| < \varepsilon$  per qualsiasi  $h, k > n$ . ■

Come si vede, il criterio fa uso unicamente dei termini della successione. Ovviamente una successione convergente è di Cauchy (in base alla diseuguaglianza triangolare). Un risultato fondamentale è che in  $R$  una successione è convergente se e solo se è di Cauchy. Il risultato si estende immediatamente a  $\mathbb{R}^n$ . Tuttavia in spazi a infinite dimensioni vi sono successioni di Cauchy che non convergono. Il fatto che una successione di Cauchy converga è così importante che gli spazi in cui tale proprietà è verificata godono di un appellativo speciale:

35 DEFINIZIONE. Uno spazio normato in cui ogni successione di Cauchy è convergente si dice completo. Uno spazio lineare normato completo prende il nome di spazio di Banach. ■

Facciamo notare che la definizione di completezza andrebbe riferita a spazi metrici che sono più generali degli spazi normati (uno spazio metrico è un insieme su cui sia definita una funzione  $\rho : X \times X \rightarrow R$  tale che  $\rho(x, y) > 0$  se e solo se  $x \neq y$ ,  $\rho(x, x) = 0$ ,  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  e  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ ; chiaramente la norma induce la metrica  $\rho(x, y) := \|x - y\|$ ).

Ad esempio sono completi e quindi di Banach i seguenti spazi:  $\mathbb{R}^n$ ,  $l_p$  con  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $c$ ,  $c_0$ ,  $L_p[a, b]$  con  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $C[a, b]$ ,  $BV[a, b]$ .

Non sono invece completi i seguenti spazi: lo spazio di tutte le successioni infinite di numeri reali con un numero finito di componenti non nulle e similmente lo spazio dei polinomi,  $C^2[a, b]$ ,  $R_p[a, b]$ .

Si consideri ad esempio il primo spazio con norma  $\|x\| = \max |x_i|$  e la successione  $\{x^k\}$  con  $x^k = (1, 1/2, 1/3, \dots, 1/k, 0, 0, \dots)$ . Allora  $\|x_k - x_h\| = \max \{1/k, 1/h\}$  e quindi la successione è di Cauchy, ma come si vede la successione non tende a nessuna successione con un numero finito di elementi diversi da zero. Lo spazio non è completo anche con norme diverse, ad esempio  $\|x\| = \sum_i |x_i|$ . Basta prendere la successione  $\{x^k\}$  con  $x^k = (a, a^2, a^3, \dots, a^k, \dots)$  e  $0 < a < 1$ .

Per far vedere che  $C^2[a, b]$  non è completo si consideri su  $C^2[-1, 1]$  la successione di funzioni

$$x^k(t) = \begin{cases} -1 & -1 \leq t \leq -1/k \\ kt & -1/k \leq t \leq 1/k \\ 1 & 1/k \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Si ha una convergenza punto a punto alla funzione

$$x(t) = \begin{cases} -1 & -1 \leq t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ 1 & 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

che non è continua.

Quando uno spazio non completo viene immerso in uno spazio di Banach più grande così da costituirne un sottospazio allora forma un sottospazio aperto. Ad esempio  $P[a, b]$  è un sottospazio aperto di  $C[a, b]$ ,  $C^2[a, b]$  e  $R_2[a, b]$  sono sottospazi aperti di  $L_2[a, b]$ . A dimensione finita ogni sottospazio deve essere necessariamente chiuso.

A dimensione infinita può anche succedere che uno sottospazio proprio sia denso nello spazio che lo contiene (un sottoinsieme  $A$  è denso nello spazio lineare normato  $X$  se per qualsiasi  $x \in X$  ed  $\varepsilon > 0$  esiste un  $a \in A$  tale che  $\|x - a\| < \varepsilon$ ). Ad esempio l'insieme dei razionali è denso nei reali però non costituisce un sottospazio di  $\mathbb{R}$  poiché gli scalari sono reali. A dimensione finita l'unico sottospazio denso è lo spazio stesso. A dimensione infinita la situazione è più interessante. Ad esempio  $P[a, b]$  è denso in  $C[a, b]$  in base al teorema di approssimazione di Weierstrass. Analogamente il sottospazio delle funzioni derivabili è denso in  $C[a, b]$ . Spazi in cui esistono insieme densi numerabili prendono il nome di *separabili*. Fra gli esempi citati gli spazi  $l_\infty$  e  $L_\infty$  non sono separabili mentre gli altri lo sono. Ad esempio per lo spazio  $C[a, b]$  tale sottoinsieme è costituito dai polinomi a coefficienti razionali.

## 2 – Spazi di Hilbert

Spesso è possibile definire su uno spazio lineare un'ulteriore struttura algebrica.

**36 DEFINIZIONE.** Si definisce prodotto interno una funzione  $X \times X \rightarrow K$ ,  $x, y \mapsto (x, y)$  con le seguenti proprietà:

- $(x, y) = \overline{(y, x)}$ , (dove  $\bar{\alpha}$  indica il complesso coniugato di  $\alpha$  nel caso il corpo  $K$  sia complesso);
- $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ ;
- $(\alpha x, y) = \alpha (x, y)$ ;
- $(x, x) > 0$  se  $x \neq \mathbf{0}$  e  $(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$ . ■

**37 DEFINIZIONE.** Due vettori  $x$  e  $y$  tali che  $(x, y) = 0$  si dicono ortogonali e si indica  $x \perp y$ . ■

Analogamente indichiamo  $x \perp A$  se  $x \perp y$  per ogni  $y \in A$ . Si noti che  $(x, y) = 0$  per ogni  $y \in X$  implica  $x = \mathbf{0}$  (basta porre  $y = x$ ).

**38 DEFINIZIONE.** Un insieme di vettori  $A$  con  $\mathbf{0} \notin A$  si dice un sistema ortogonale se  $(x, y) = 0, \forall x, y \in A, x \neq y$ . Il sistema si dice ortonormale se inoltre  $(x, x) = 1, \forall x \in A$ . ■

**39 TEOREMA.** Un sistema ortogonale è linearmente indipendente. ■

Se è possibile definire un prodotto interno la topologia viene definita tramite il prodotto interno. Lo spazio diventa normato con norma indotta dal prodotto interno  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ . Che ciò sia possibile discende dalla *diseguaglianza di Cauchy-Schwarz*:

$$(x, y) \leq \|x\| \|y\|$$

che implica anche la continuità del prodotto interno. Inoltre vale la cosiddetta regola del parallelogramma

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

e l'estensione del teorema di Pitagora:

**40 TEOREMA.** Se  $x \perp y$  allora  $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$ . ■

**41 DEFINIZIONE.** Uno spazio normato con prodotto interno, completo e separabile prende il nome di spazio di Hilbert. ■

**42 DEFINIZIONE.** Un sistema ortogonale (ortonormale)  $B$  è una base ortogonale (ortonormale) di uno spazio di Hilbert  $H$  se il più piccolo sottospazio chiuso contenente  $B$  è  $H$  stesso. ■

Ecco alcuni esempi di spazi di Hilbert e basi ortonormali.

**43 ESEMPIO.** In  $\mathbb{R}^n$ , definendo  $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$  il sistema  $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$ , è una base ortonormale. Questo sistema non è ortonormale con una diversa definizione di prodotto interno quale ad esempio  $(x, y) = x^T Q y$  con  $Q$  matrice positiva definita. In questo caso sono ortogonali le cosiddette direzioni coniugate. Dato un vettore  $\hat{x}$  sono ortogonali a  $\hat{x}$  tutti i vettori tangenti all'ellissoide di equazione  $x^T Q x \leq \hat{x}^T Q \hat{x}$  nel punto  $\hat{x}$ . ■

44 ESEMPIO. Lo spazio  $l_2$  diventa di Hilbert se il prodotto interno viene definito come  $(x, y) = \sum_i^\infty x_i y_i$ . La sommatoria è chiaramente convergente e una base ortonormale è fornita dai vettori

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \dots), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots), \\ e_3 &= (0, 0, 1, \dots), \\ &\dots \end{aligned}$$

Dato  $x = (x_1, x_2, \dots)$ , definiamo  $x^k = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, 0, \dots)$  e allora  $x^k = \sum_i^k x_i e_i$  e  $\|x - x^k\| \rightarrow 0$ , quindi ogni  $x$  sta nella chiusura delle combinazioni lineari del sistema che è perciò una base. ■

45 ESEMPIO. Lo spazio  $L_2[a, b]$  è di Hilbert con la definizione di prodotto interno

$$(x, y) = \int_a^b x(t) y(t) dt,$$

dove l'integrale è di Lebesgue. Un sistema ortonormale è dato dalle funzioni:

$$1, \quad \cos \frac{2\pi k t}{b-a}, \quad \sin \frac{2\pi k t}{b-a} \quad k = 1, 2, \dots$$

Il sistema costituisce una base ortonormale in virtù di una opportuna versione del teorema di approssimazione di Weierstrass. ■

46 ESEMPIO. Lo spazio  $C^2[a, b]$  con prodotto interno dato dall'integrale di Riemann  $(x, y) = \int_a^b x(t) y(t) dt$  non è di Hilbert perché non è completo. ■

L'esistenza di basi ortonormali in spazi di Hilbert è affidata ai seguenti risultati:

47 TEOREMA. *Ogni sistema ortogonale in uno spazio di Hilbert è al più numerabile.* ■

48 TEOREMA. *(Procedura di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt) Sia  $x^1, x^2, \dots$  un insieme numerabile e linearmente indipendente di elementi di uno spazio di Hilbert  $H$ . Allora  $H$  contiene un insieme numerabile e ortonormale  $y^1, y^2, \dots$  tale che*

- ogni  $y^k$  è combinazione lineare di  $x^1, x^2, \dots, x^k$  e il coefficiente di  $x^k$  è diverso da zero;
- ogni  $x^k$  è combinazione lineare di  $y^1, y^2, \dots, y^k$  e il coefficiente di  $y^k$  è diverso da zero;
- ogni elemento  $y^k$  è determinato unicamente a meno del segno.

DIMOSTRAZIONE:  $y^1 := x^1 / \|x^1\|$  dopodiché ricorsivamente per  $k \geq 2$ ,  $z^k := x^k - \sum_{i=1}^{k-1} (x^k, y^i) y^i$ ,  $y^k := z^k / \|z^k\|$ . ■

49 COROLLARIO. *Ogni spazio di Hilbert possiede una base numerabile e ortonormale.* ■

Una proprietà degli spazi finito dimensionali è che, data una base ortonormale  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , ogni elemento  $x$  si può esprimere come:

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \tag{1}$$

dove

$$\alpha_i = (x, e_i)$$

La definizione di base in 42 garantisce questa proprietà se lo spazio è a finite dimensioni. L'estensione di (1) ad uno spazio di Hilbert a infinite dimensioni richiede la convergenza della serie  $x = \sum_{i=1}^\infty \alpha_i e_i$ . A questo scopo serve il seguente risultato:

50 TEOREMA. (teorema di proiezione) Sia  $H$  uno spazio di Hilbert,  $S$  un sottospazio chiuso di  $H$  ed  $x \in H$  arbitrario. Allora esiste ed è unico un elemento  $\hat{s} \in S$  (proiezione di  $x$  su  $S$ ) tale che  $\|x - \hat{s}\| \leq \|x - s\|$  per ogni  $s \in S$ . Inoltre condizione necessaria e sufficiente affinché  $\hat{s}$  sia l'unico elemento di  $S$  che minimizza  $\|x - s\|$  è che  $(x - \hat{s}) \perp S$ .

DIMOSTRAZIONE: Se  $\hat{s}$  minimizza  $\|x - s\|$  ed esiste  $s' \in S$  tale che  $(x - \hat{s}, s') = \alpha > 0$  allora esiste  $\hat{s} + \alpha s' \in S$  per il quale (sia senza perdita di generalità  $\|s'\| = 1$ )

$$\begin{aligned} \|x - \hat{s} - \alpha s'\|^2 &= (x - \hat{s} - \alpha s', x - \hat{s} - \alpha s') = \\ &= (x - \hat{s}, x - \hat{s}) - 2\alpha(x - \hat{s}, s') + |\alpha|^2(s', s') = \|x - \hat{s}\|^2 - 2\alpha(x - \hat{s}, s') + |\alpha|^2 < \|x - \hat{s}\|^2 - \alpha^2 < \|x - \hat{s}\|^2 \end{aligned}$$

che contraddice la minimalità di  $x - \hat{s}$ . Sia ora  $(x - \hat{s}) \perp S$ . Quindi (teorema di Pitagora)  $\|x - \hat{s}\|^2 + \|\hat{s} - s\|^2 = \|x - s\|^2$  e cioè  $\|x - \hat{s}\|^2 < \|x - s\|^2$  per ogni  $s \in S, s \neq \hat{s}$ .

Resta da dimostrare l'esistenza di  $\hat{s}$ . Se  $x \in S$  basta porre  $\hat{s} = x$ . Altrimenti sia  $\alpha = \inf_{s \in S} \|x - s\|$ . Sia  $\{s_i\}$  una successione in  $S$  tale che  $\|x - s_i\| \rightarrow \alpha$ . Dalla regola del parallelogramma

$$\|2x - s_i - s_j\|^2 + \|s_i + s_j\|^2 = 2\|x - s_i\|^2 + 2\|x - s_j\|^2$$

Siccome  $(s_i + s_j)/2 \in S, \|2x - s_i - s_j\|^2 = 4\|x - (s_i + s_j)/2\|^2 \geq 4\alpha^2$  e quindi

$$\|s_i + s_j\|^2 \leq 2\|x - s_i\|^2 + 2\|x - s_j\|^2 - 4\alpha^2$$

e siccome  $\|x - s_i\|^2 \rightarrow \alpha^2, \|s_i + s_j\|^2 \rightarrow 0$  e  $\{s_i\}$  è di Cauchy. Lo spazio è completo per ipotesi e quindi  $\{s_i\}$  converge a  $\hat{s}$  che per la chiusura di  $S$  sta in  $S$ . Per la continuità della norma si ha  $\|x - \hat{s}\| = \alpha$ . ■

51 TEOREMA. Sia  $(e_1, e_2, \dots)$  una base ortonormale in uno spazio di Hilbert  $H$  e sia  $x \in H$  arbitrario. Sia  $c_k = (x, e_k)$ . Allora la serie  $\sum_{i=1}^{\infty} c_k e_k$  è convergente ad  $x$ .

DIMOSTRAZIONE: Sia  $S_n$  il sottospazio generato da  $(e_1, \dots, e_n)$ . Allora l'elemento  $s_n = \sum_{k=1}^n \sigma_k e_k \in S_n$  che minimizza  $\|x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k\|$  esiste ed è unico ed inoltre  $(x - s_n) \perp e_i, i = 1, \dots, n$ . Quindi  $(x - \sum_{k=1}^n \sigma_k e_k, e_i) = 0, i = 1, \dots, n$  da cui

$$(x, e_i) = \left( \sum_{k=1}^n \sigma_k e_k, e_i \right) = \sum_{k=1}^n \sigma_k (e_k, e_i) = \sigma_i$$

Pertanto  $s_n = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i$ . Dato  $\varepsilon > 0$  esistono  $n$  e  $\hat{s}_n \in S_n$  tali che  $\|x - \hat{s}_n\| \leq \varepsilon$  (per definizione di base) e quindi  $\|x - s_n\| \leq \varepsilon$  (per la proprietà di  $s_n$ ). Allora  $s_n \rightarrow x$ . ■

I coefficienti  $\sigma_i$  prendono il nome di *coefficienti di Fourier* e la serie  $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i e_i$  quello di *serie di Fourier*.

52 TEOREMA. Sia  $\{e_i\}$  un arbitrario sistema ortonormale e  $x$  un arbitrario elemento di uno spazio di Hilbert. Allora  $\sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)|^2 \leq \|x\|^2$  (Diseguaglianza di Bessel). Inoltre  $\sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)|^2 = \|x\|^2$  se e solo se il sistema è una base (Teorema di Parseval).

DIMOSTRAZIONE: Sia  $s_n$  definito come nel teorema 51. Dal teorema di Pitagora

$$\|x\|^2 = \|x - s_n\|^2 + \|s_n\|^2 = \|x - s_n\|^2 + \sum_{i=1}^n |(x, e_i)|^2 \quad (2)$$

da cui

$$\sum_{i=1}^n |(x, e_i)|^2 \leq \|x\|^2$$

per ogni  $n$  e quindi

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)|^2 \leq \|x\|^2$$

Se il sistema ortonormale è una base allora  $s_n \rightarrow x$  e da (2)  $\|s_n\|^2 \rightarrow \|x\|^2$  cioè  $\sum_{i=1}^{\infty} |(x, e_i)|^2 = \|x\|^2$ . L'implicazione inversa è immediata sempre da (2). ■



53 TEOREMA. (teorema di Riesz-Fischer) Dato un sistema ortonormale  $\{e_i\}$  in uno spazio di Hilbert e una successione di scalari  $\{\sigma_i\}$  tale che  $\sum_{i=1}^{\infty} |\sigma_i|^2$  converge, allora esiste  $x \in H$  tale che  $\{\sigma_i\}$  sono i coefficienti di Fourier di  $x$ .

DIMOSTRAZIONE: Sia  $s_n = \sum_{i=1}^n \sigma_i e_i$ . Allora

$$\|s_n - s_m\|^2 = \sum_{i=n+1}^m |\sigma_i|^2$$

che è di Cauchy perché la serie  $\sum_{i=1}^{\infty} |\sigma_i|^2$  converge. Quindi anche  $\{s_i\}$  è di Cauchy e, in base alla completezza dello spazio, converge ad un elemento  $x \in H$ . Si noti che  $(s_n, e_i) = \sigma_i$  e quindi per la continuità del prodotto interno  $(s_n, e_i) \rightarrow (x, e_i)$ . ■

Gli spazi di Hilbert godono di una proprietà molto importante che è tipica degli spazi a finite dimensioni. Infatti vale

54 TEOREMA. Spazi reali di Hilbert infinito dimensionali sono isometricamente isomorfi.

DIMOSTRAZIONE: Basterà dimostrare che ogni spazio di Hilbert (a infinite dimensioni) è isomorfo a  $l_2$ . Siano  $\{\sigma_i\}$  i coefficienti di Fourier di  $x \in H$ . Dalla disuguaglianza di Bessel  $\{\sigma_i\} \in l_2$ . Inoltre dato un elemento  $\sigma \in l_2$  esiste un elemento  $x = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i e_i \in H$  in base al teorema di Riesz-Fischer. La corrispondenza biunivoca  $\sigma \leftrightarrow x$  è un ovvio isomorfismo per le operazioni di somma e prodotto scalare. Per ciò che riguarda il prodotto interno siano  $\sigma \leftrightarrow x$  e  $\rho \leftrightarrow y$ . Allora

$$(x, y) = \left( \sum_i \sigma_i e_i, \sum_j \rho_j e_j \right) = \sum_{i,j} \sigma_i \rho_j (e_i, e_j) = \sum_i \sigma_i \rho_i$$

e dal teorema di Parseval

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\sigma_i|^2 = \|\sigma\|^2. \quad \blacksquare$$

Un modo per verificare se un sistema ortonormale è completo (cioè è una base) è dato, oltre che dal teorema di Parseval, dal seguente facile risultato:

55 TEOREMA. Un sistema ortonormale  $\{e_i\}$  è completo se e solo se l'unico vettore ortogonale a tutti gli  $e_i$  è l'origine. ■

I precedenti risultati sono facilmente estendibili a spazi di Hilbert complessi.

56 ESEMPIO. Si consideri lo spazio di Hilbert  $L_2[-1, 1]$  e il sistema di elementi linearmente indipendenti  $1, t, t^2, \dots$ . Applicando la procedura di Gram-Schmidt si ottiene:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} & y_2 &= t - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{2}} dt = t \\ & & \int_{-1}^1 t^2 dt &= \left[ \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3} \\ e_2 &= \frac{t}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{2}} t \end{aligned}$$

Proseguendo si ottiene

$$e_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(t) \quad \text{dove} \quad P_n(t) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (1-t^2)^n \quad (3)$$

sono i polinomi di Legendre. Si può dimostrare che il sistema (3) è completo. ■

57 ESEMPIO. Si consideri lo spazio di Hilbert complesso  $L_2[0, 2\pi]$ . Le funzioni

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

sono un sistema ortonormale che danno luogo alla classica espansione in serie di Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}$$

dove

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} x(t) e^{-ikt} dt$$

(nello spazio complesso  $L_2[a, b]$  il prodotto va definito come  $\int_a^b x(t) \overline{y}(t) dt$ )

### 3 – Problemi a norma minima in spazi di Hilbert

Alcuni problemi di ottimizzazione possono venire formulati come problemi a norma minima in spazi di Hilbert. Due sono le forme in cui tali problemi si presentano. In un caso è definito un sottospazio  $S$ , è dato un elemento  $a \notin S$  e si cerca un elemento  $x \in S$  tale che  $\|a - x\|$  sia minima. Nel secondo caso è data una varietà lineare  $M$  e si cerca un elemento  $x \in M$  di norma minima.

Questi problemi possono essere risolti applicando il teorema di proiezione e, in particolare se  $S$  ha dimensione finita oppure  $M$  è definito da un insieme finito di prodotti, la soluzione si ottiene semplicemente risolvendo un sistema lineare.

Consideriamo il primo caso e sia  $S$  definito come l'involuppo lineare di  $n$  vettori  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Dal teorema di proiezione sappiamo che  $(a - x)$  deve essere ortogonale ad ogni  $y_i$ . Siccome inoltre  $x = \sum_i \xi_i y_i$ , i valori incogniti  $\xi_i$  si possono calcolare imponendo la condizione di ortogonalità:

$$(a - \sum_i \xi_i y_i, y_i) = 0 \quad \forall i$$

cioè

$$\sum_j (y_j, y_i) \xi_j = (a, y_i) \quad \forall i \tag{4}$$

Sia  $\Gamma$  la matrice di componenti  $\Gamma_{ij} = (y_j, y_i)$ . Se i vettori  $y_1, \dots, y_n$  sono linearmente indipendenti  $\Gamma$  è non singolare e il sistema (4) può essere risolto. Alternativamente si può generare un sistema ortonormale dagli  $y_i$  con la procedura di Gram-Schmidt, nel qual caso i valori  $\xi_i$  cercati sono semplicemente i coefficienti di Fourier limitati ai primi  $n$  termini.

Nel secondo caso viene definita una varietà lineare  $M$  tramite i seguenti  $n$  vincoli

$$(x, y_i) = \alpha_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Sia  $S$  il sottospazio che genera  $M$  (cioè  $M = a + S$  con  $a$  elemento arbitrario di  $M$ ). Si noti che  $M$  e quindi  $S$  sono chiusi. Dal teorema di proiezione risulta che  $x \perp s, \forall s \in S$ . Il sottospazio  $S$  si può anche esprimere come l'insieme dei vettori  $s$  che soddisfano

$$(s, y_i) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

e quindi  $x = \sum_i \xi_i y_i$ . Il calcolo dei coefficienti  $\xi_i$  si effettua imponendo la condizione  $x \in M$ , cioè

$$\left( \sum_j \xi_j y_j, y_i \right) = \alpha_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ovvero

$$\sum_j (y_j, y_i) \xi_j = \alpha_i \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{5}$$

Come per (4) la matrice  $\Gamma$  è non singolare se e solo se i vettori  $y_i$  sono linearmente indipendenti e in questo caso il sistema (5) può essere facilmente risolto analogamente a (4).

58 ESEMPIO. Si consideri il problema del controllo ottimo di un sistema dinamico lineare. In generale un sistema lineare a tempo continuo e con stato a finite dimensioni può essere modellato dal seguente sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine, dove  $x(t)$  è un vettore di  $n$  funzioni di stato  $x_i(t)$ ,  $A$  è una matrice  $n \times n$ ,  $u(t)$  è un vettore di  $m$  funzioni di controllo  $u_i(t)$  e  $B$  è una matrice  $n \times m$ :

$$\frac{dx(t)}{dt} = A x(t) + B u(t)$$

Noto lo stato iniziale  $x(0)$  e il controllo  $u(t)$  per  $t \in [0, T]$  lo stato  $x(T)$  è dato dalla seguente espressione:

$$x(T) = \Phi(T) x(0) + \int_0^T \Phi(T-t) B u(t) dt \quad (6)$$

dove

$$\Phi(t) := e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \frac{A^4 t^4}{4!} + \dots$$

e la serie è assolutamente convergente per qualsiasi  $A$  e  $t$ .

Sia  $L_2^m[0, T] = L_2[0, T] \times L_2[0, T] \times \dots \times L_2[0, T]$  ( $m$  volte). Un elemento di  $L_2^m[0, T]$  è un vettore di  $m$  funzioni Lebesgue integrabili e il prodotto interno è definito come

$$(y, u) = \sum_{i=1}^m \int_0^T y_i(t) u_i(t) dt$$

L'espressione (6) può essere interpretata come  $n$  vincoli del tipo  $(y^j, u) = \alpha_j$  in  $L_2^m[0, T]$  con

$$y_i^j(t) := \sum_{k=1}^n \Phi_{j,k}(T-t) B_{ki}; \quad \alpha_j := x_j(T) - \sum_{k=1}^n \Phi_{j,k}(T) x_k(0)$$

Se si cerca il controllo che minimizza  $\sum_i \int_0^T u_i^2(t) dt$  la soluzione si ottiene, in base ai risultati precedenti, risolvendo dapprima il sistema lineare  $\Gamma \xi = \alpha$  dove

$$\Gamma = \int_0^T \Phi(T-t) B B' \Phi'(T-t) dt$$

e poi ponendo  $u(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i y^i(t)$ .

Nell'esempio dello spostamento di una massa (si veda *Ottimizzazione*, esempio 9.43) il modello è:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ K \end{pmatrix} u(t) \quad (7)$$

con  $K = 1/m$ . In questo caso il calcolo di  $\Phi(t)$  è immediato in quanto  $A^k = 0$  per  $k \geq 2$ . Quindi

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'è un'unica funzione di controllo e quindi il problema è modellato in  $L_2[0, T]$  con

$$y^1(t) = K(T-t); \quad y^2(t) = K; \quad \alpha_1 = x_1(T) - x_1(0) - T x_2(0); \quad \alpha_2 = x_2(T) - x_2(0)$$

da cui

$$\Gamma = \frac{K^2 T}{6} \begin{pmatrix} 2T^2 & 3T \\ 3T & 6 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\xi_1 = \frac{6(2x_1(T) - T x_2(T) - 2x_1(0) - T x_2(0))}{K^2 T^3}$$

$$\xi_2 = \frac{2(-3x_1(T) + 2T x_2(T) + 3x_1(0) + T x_2(0))}{K^2 T^2}$$

Sostituendo i valori  $K = 0.001$ ,  $x(0) = (-10, 0)$ ,  $x(T) = (0, 0)$  e  $T = 5$  si ottiene  $u(t) = 2400 - 960 t$ .

59 ESEMPIO. Si consideri l'esempio dello spostamento di un carico appeso ad una gru (si veda *Ottimizzazione*, esempio 9.44). Il sistema è descritto da

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -H & 0 & H & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ K & 0 & -K & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ J \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \quad (8)$$

dove  $H = g m_1/m_0 L$ ,  $K = g/L$  e  $J = 1/m_0$ . Usiamo i seguenti valori:  $m_0 = 50$  kg,  $m_1 = 200$  kg,  $L = 5$  m,  $g = 9.8$  m/sec<sup>2</sup>. L'obiettivo è di spostare il carico di 10 metri in 5 secondi con un controllo ad energia minima. In questo caso il calcolo di  $\Phi(t)$  è più complicato. Si è calcolata la serie fino all'ottavo termine, si è indotta un'espressione per  $\Phi(t)$ , che poi è stata sottoposta alla verifica  $d\Phi(t)/dt = A\varphi(t)$ . Pertanto si ottiene (ponendo  $\omega^2 := K + H$ ):

$$\Phi(t) := \frac{1}{\omega^2} \begin{pmatrix} K + H \cos(\omega t) & Kt + H/\omega \sin(\omega t) & H - H \cos(\omega t) & Ht - H/\omega \sin(\omega t) \\ -H\omega \sin(\omega t) & K + H \cos(\omega t) & H\omega \sin(\omega t) & H - H \cos(\omega t) \\ K - K \cos(\omega t) & Kt - K/\omega \sin(\omega t) & H + K \cos(\omega t) & Ht + K/\omega \sin(\omega t) \\ K\omega \sin(\omega t) & K - K \cos(\omega t) & -K\omega \sin(\omega t) & H + K \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

da cui

$$y(t) = \frac{1}{m_0 \omega^2} \begin{pmatrix} K(T-t) + H/\omega \sin(\omega(T-t)) \\ K + H \cos(\omega(T-t)) \\ K(T-t) - K/\omega \sin(\omega(T-t)) \\ K - K \cos(\omega(T-t)) \end{pmatrix}$$

Il calcolo della matrice di Gram porta a:

$$\Gamma = 10^{-3} \begin{pmatrix} 0.797 & 0.205 & 0.674 & 0.214 \\ 0.205 & 0.720 & 0.189 & -0.078 \\ 0.674 & 0.189 & 0.654 & 0.198 \\ 0.214 & -0.078 & 0.198 & 0.119 \end{pmatrix}$$

e

$$\alpha = (10 \quad 0 \quad 10 \quad 0)$$

per cui

$$\xi = 10^3(11.94 \quad -29.25 \quad 48.11 \quad -120.)$$

e quindi

$$\begin{aligned} u(t) &= 600. - 240. t + 15.39 \cos(3.13 (5 - t)) - 0.427 \sin(3.13 (5 - t)) = \\ &= 600. - 240. t - 15.40 \sin(3.13 (t - 2.5)) \end{aligned}$$

Il grafico di  $u(t)$  è riportato in Figura 1. In Figura 2 è riportata la traiettoria delle due variabili di posizione  $x_1(t)$  e  $x_3(t)$  e in Figura 3 quella delle due variabili di velocità  $x_2(t)$  e  $x_4(t)$ . Si osservi che dopo 2.5 secondi le due variabili di velocità ripercorrono la stessa traiettoria all'indietro.

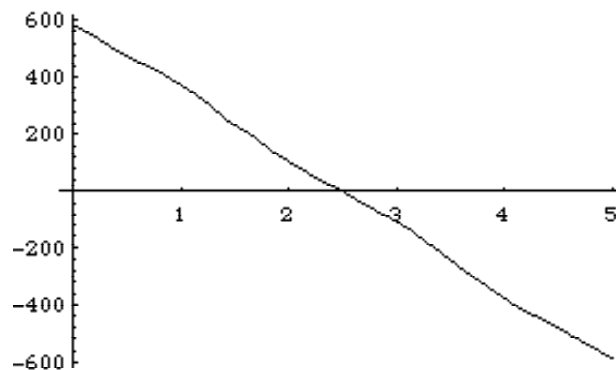


Figura 1 - Controllo ottimo  $u(t)$

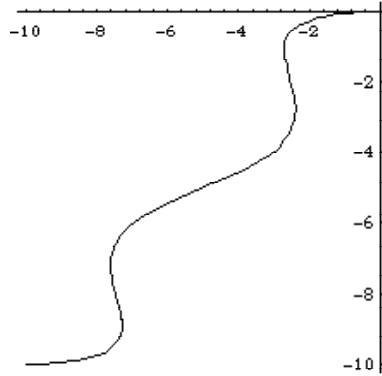


Figura 2 -  $x_1(t)$  e  $x_3(t)$

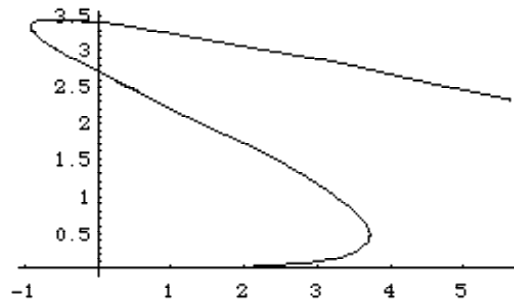


Figura 3 -  $x_2(t)$  e  $x_4(t)$

#### 4 – Stima di variabili aleatorie

Il problema di calcolare la stima ottima di variabili aleatorie può essere affrontato in modo efficace modellando il problema in uno spazio di Hilbert. In questo caso lo spazio di Hilbert consiste di variabili aleatorie. Sia data una collezione  $y_1, y_2, \dots, y_n$  di variabili aleatorie a valori reali con varianza finita. Tutte le loro combinazioni lineari definiscono uno spazio lineare. Il prodotto interno viene definito come

$$(x, z) = E[xz]$$

e quindi la norma corrisponde alla radice quadrata del secondo momento  $E[x^2]$ . Come si vede questa definizione è consistente con i requisiti della norma, in quanto l'origine corrisponde alla funzione aleatoria identicamente nulla (quindi deterministica). Questa definizione di prodotto interno porta ad identificare il concetto di ortogonalità con quello di indipendenza stocastica se le variabili sono a valor medio nullo. Infatti l'indipendenza stocastica implica  $E[xz] = E[x]E[z]$ .

Un problema frequente consiste nello stimare una variabile aleatoria  $x$  ignota a partire da una serie di osservazioni  $y_1, \dots, y_n$ . In molti casi si assume che la stima  $\hat{x}$  dipenda linearmente dalle osservazioni cioè  $\hat{x} = \sum_i \xi_i y_i$ . I coefficienti  $\xi_i$  si determinano in modo da minimizzare l'errore di stima che viene definito come  $E[(x - \hat{x})^2]$ .

Si tratta quindi di trovare un elemento del sottospazio generato dagli elementi  $y_i$  la cui distanza da  $x$  è minima. Basta applicare il teorema di proiezione e si ha quindi che

$$(x - \hat{x}, y_i) = (x - \sum_j \xi_j y_j, y_i) = 0 \quad \forall i$$

da cui, indicando  $\Gamma$  la matrice di elementi  $(y_i, y_j) = E[y_i y_j]$  e con  $\gamma$  il vettore di componenti  $(x, y_i) = E[x y_i]$ , si ha  $\Gamma \xi = \gamma$  e il calcolo degli  $\xi_i$  è possibile se le variabili  $y_i$  sono linearmente indipendenti, ovvero sono stocasticamente indipendenti. In questo caso possiamo quindi scrivere

$$\hat{x} = \gamma' \Gamma^{-1} y$$

con errore dato da

$$E[x^2 - \gamma' \Gamma^{-1} \gamma]$$

Supponiamo ad esempio che un insieme di  $n$  osservazioni  $y_1, \dots, y_n$  venga generato a partire da un insieme di  $m$  variabili aleatorie  $x_1, \dots, x_m$  tramite la seguente relazione

$$y_i = \sum_j W_{ij} x_j + \varepsilon_i$$

dove i coefficienti  $W_{ij}$  sono parametri noti e  $\varepsilon_i$  sono variabili aleatorie a valor medio nullo stocasticamente indipendenti dalle variabili  $x_j$ . Supponiamo note le matrici  $Q_{ij} := E[\varepsilon_i \varepsilon_j]$  e  $R_{ij} := E[x_i x_j]$ . Applicando i risultati precedenti possiamo calcolare le stime  $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_m$ . Quindi

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij} &= E[y_i y_j] = E \left[ \left( \sum_h W_{ih} x_h + \varepsilon_i \right) \left( \sum_k W_{jk} x_k + \varepsilon_j \right) \right] = \\ &= \sum_h \sum_k W_{ih} R_{hk} W_{jk} + Q_{ij} \end{aligned}$$

cioè  $\Gamma = W R W' + Q$ . La matrice  $\Gamma$  è indipendente dal particolare  $x_j$  stimato. Il vettore  $\gamma^j$  corrispondente a  $\hat{x}_j$  è dato da:

$$\begin{aligned} \gamma_i^j &= E[x_j y_i] = E \left[ x_j \left( \sum_h W_{ih} x_h + \varepsilon_i \right) \right] = \\ &= \sum_h W_{ih} E[x_j x_h] = \sum_h W_{ih} R_{jh} \end{aligned}$$

Quindi, in notazione matriciale si ha (indicando  $\hat{x}$  il vettore  $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m$ ):

$$\hat{x} = \Theta y = R W' (W R W' + Q)^{-1} y \quad (9)$$

Alternativamente, usando l'identità matriciale (di facile verifica)

$$R W' (W R W' + Q)^{-1} = (W' Q^{-1} W + R^{-1})^{-1} W' Q^{-1}$$

si perviene alla seguente espressione della stima

$$\Theta = (W' Q^{-1} W + R^{-1})^{-1} W' Q^{-1} \quad (10)$$

L'errore, trattandosi di una stima multipla, viene definito come  $\sum_i E[(\hat{x}_i - x_i)^2]$ . Definendo covarianza dell'errore la matrice  $\Delta := E[(\hat{x} - x)(\hat{x} - x)']$ , l'errore si può esprimere come  $\text{Tr} \Delta$ . La matrice  $\Delta$  viene calcolata da:

$$\begin{aligned} \Delta &:= E[(\hat{x} - x)(\hat{x} - x)'] = E[(R W' \Gamma^{-1} y - x)(R W' \Gamma^{-1} y - x)'] = \\ &= E[R W' \Gamma^{-1} y y' \Gamma^{-1} W R - R W' \Gamma^{-1} y x' - x y' \Gamma^{-1} W R + x x'] \end{aligned}$$

Siccome  $E[y y'] = \Gamma$  e  $E[x y'] = R W'$  si ha

$$\Delta = R - R W' (W R W' + Q)^{-1} W R = R - \Theta W R$$

o alternativamente

$$\begin{aligned} \Delta &= R - (W' Q^{-1} W + R^{-1})^{-1} W' Q^{-1} W R = \\ &= (W' Q^{-1} W + R^{-1})^{-1} ((W' Q^{-1} W + R^{-1}) R - W' Q^{-1} W R) = \\ &= (W' Q^{-1} W + R^{-1})^{-1} \end{aligned}$$

Si noti che in generale, con una stima di tipo lineare, si ha  $E[\hat{x}] \neq E[x]$  a meno che il valor medio di ogni  $x_i$  sia nullo. La stima si dice *deviata* (*biased*) se il valore atteso della stima non coincide con il valore atteso della grandezza da stimare. Per ottenere una stima non deviata bisogna far uso di stimatori affini, cioè del tipo  $\hat{x} = \Theta y + a$ . Se le variabili da stimare sono dei parametri sui quali nessuna ipotesi statistica può essere fatta, la situazione è assimilabile a quella di variabili a varianza infinita per le quali quindi  $R^{-1} = \mathbf{0}$ . In questo caso la stima, effettuabile solo nel caso di  $n \geq m$ , è data da  $\hat{x} = (W'Q^{-1}W)^{-1}W'Q^{-1}y$  che è la classica espressione del metodo ai minimi quadrati con osservazioni pesate tramite la matrice  $Q$ . In questo caso  $\hat{x} = x + \Theta\varepsilon$  e quindi  $E[\hat{x}] = E[x]$  e la stima non è deviata.

La tecnica di identificare il prodotto interno con la covarianza diventa particolarmente vantaggiosa quando siano disponibili ulteriori osservazioni delle variabili da stimare e si voglia ricalcolare la stima sfruttando la stima attualmente disponibile. L'idea di base consiste nel valutare solo la componente della nuova osservazione ortogonale al sottospazio delle precedenti osservazioni. Solo questa rappresenta informazione aggiuntiva non correlata con le precedenti osservazioni e prende il nome di innovazione. Si tratta a questo punto di aggiornare la stima aggiungendo la componente della variabile da stimare lungo l'innovazione. Passaggio chiave di questo metodo, nel caso di osservazioni linearmente dipendenti dalle variabili da stimare, è l'osservazione per cui, nel calcolo dell'innovazione, non occorre calcolare esplicitamente la proiezione della nuova osservazione sul sottospazio delle precedenti osservazioni perché tale proiezione è semplicemente funzione lineare della stima esattamente come lo sono le osservazioni.

Sia pertanto  $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$  la stima ottima delle variabili  $x = (x_1, \dots, x_n)$  relativamente al sottospazio  $S$ . Sia  $y = (y_1, \dots, y_m)$  una nuova osservazione dipendente da  $x$ . Allora la proiezione di  $y$  su  $S$  è la stima ottima  $\hat{y}$  di  $y$  relativamente ad  $S$ . L'innovazione è costituita da  $\tilde{y} := y - \hat{y}$ . La proiezione di  $x$  sul sottospazio  $S'$  generato da  $S$  e  $y$  si ottiene semplicemente sommando la proiezione di  $x$  su  $S$ , cioè  $\hat{x}$ , alla proiezione di  $x$  sul sottospazio generato da  $\tilde{y}$ . Pertanto si ha:

$$\hat{x} := \hat{x} + E[x\tilde{y}'](E[\tilde{y}\tilde{y}'])^{-1}\tilde{y}$$

Sia  $Ax$  una funzione lineare di  $x$ . Faremo vedere ora che la stima ottima di  $Ax$  è proprio  $A\hat{x}$ . Infatti per l'ottimalità  $(x - \hat{x}, y) = 0$  per qualsiasi  $y \in S$  dove  $S$  è il sottospazio delle osservazioni. Per le proprietà del prodotto interno si ha  $(Ax - A\hat{x}, y) = A(x - \hat{x}, y) = 0$  e quindi  $A\hat{x}$  è stima ottima di  $Ax$ .

Applichiamo ora questi principi al caso in cui

$$y = Wx + \varepsilon$$

sia la nuova osservazione con  $\varepsilon$  variabile aleatoria a valor medio nullo e matrice di covarianza  $Q$  indipendente da  $x$  e dalle precedenti osservazioni. Da queste è stata calcolata una stima ottima  $\hat{x}$  e la covarianza dell'errore  $\Delta := E[(x - \hat{x})(x - \hat{x})']$ . Vogliamo aggiornare  $\hat{x}$  e  $\Delta$  in base ad  $y$ . Dobbiamo pertanto calcolare  $\tilde{y}$ ,  $E[x\tilde{y}']$ ,  $E[\tilde{y}\tilde{y}']$ .

Per quanto osservato  $\hat{y} = W\hat{x}$  ( $\varepsilon$  ha valor medio nullo). Quindi  $\tilde{y} = y - W\hat{x} = W(x - \hat{x}) + \varepsilon$ . Si noti che  $\tilde{y}$ , per come viene costruita, è ortogonale a  $\hat{x}$ , quindi

$$E[x\tilde{y}'] = E[(x - \hat{x})\tilde{y}'] = E[(x - \hat{x})(W(x - \hat{x}) + \varepsilon)'] = E[(x - \hat{x})(x - \hat{x})']W' = \Delta W'$$

$$E[\tilde{y}\tilde{y}'] = E[(W(x - \hat{x}) + \varepsilon)(W(x - \hat{x}) + \varepsilon)'] = W\Delta W' + Q$$

e allora

$$\hat{x} := \hat{x} + \Delta W'(W\Delta W' + Q)^{-1}(y - W\hat{x}) \quad (11)$$

Per l'aggiornamento dell'errore, indicando  $\Theta = \Delta W'(W\Delta W' + Q)^{-1}$  si ha che la differenza  $(x - \hat{x})$  è diventata

$$x - \hat{x} - \Theta(y - W\hat{x}) = x - \hat{x} - \Theta(Wx - W\hat{x} + \varepsilon) = (I - \Theta W)(x - \hat{x}) + \Theta\varepsilon$$

quindi

$$\begin{aligned} \Delta &:= E[((I - \Theta W)(x - \hat{x}) + \Theta\varepsilon)((I - \Theta W)(x - \hat{x}) + \Theta\varepsilon)'] = \\ &= (I - \Theta W)\Delta(I - W'\Theta') + \Theta Q \Theta \end{aligned}$$

che porta a

$$\Delta := \Delta - \Delta W'(W\Delta W' + Q)^{-1}W\Delta \quad (12)$$

60 ESEMPIO.

Si consideri il semplice esempio di  $n$  osservazioni dirette di una grandezza  $x$  affette da errore  $\varepsilon$ . Quindi

$$y_i := x + \varepsilon_i$$

Sia  $\sigma^2$  la varianza di ogni  $\varepsilon_i$ . Supponendo gli errori di osservazione indipendenti fra loro (ma con medesima distribuzione) si ha  $Q = \sigma^2 I$ . Supponiamo dapprima di non avere alcuna informazione a priori su  $x$ . Useremo quindi l'espressione (10) con  $R^{-1} = \mathbf{0}$ . Inoltre  $W = \mathbf{1}$ . Allora si ha

$$\hat{x} = (\sigma^2 \mathbf{1}' I \mathbf{1})^{-1} \sigma^2 \mathbf{1}' I y = \frac{\sum_i y_i}{n}$$

come è ben noto. Supponiamo ora di conoscere il secondo momento  $R$  di  $x$ . Applicando l'espressione (9) si ha

$$\begin{aligned} \hat{x} &= R \mathbf{1}' (R \mathbf{1} \mathbf{1}' + \sigma^2 I)^{-1} y = R \mathbf{1}' \frac{1}{\sigma^2} \left( I - \frac{R}{\sigma^2 + nR} \mathbf{1} \mathbf{1}' \right) y = \\ &= \frac{R}{\sigma^2} \left( \mathbf{1}' - \frac{Rn}{\sigma^2 + Rn} \mathbf{1}' \right) y = \frac{R}{Rn + \sigma^2} \sum_i y_i \end{aligned}$$

■

61 ESEMPIO.

In questo esempio abbiamo  $y_i = \sum_j W_{ij} x_j + \varepsilon_i$  con

$$W = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e  $\varepsilon$  vettore di variabili uniformemente distribuite rispettivamente negli intervalli  $[-1, 1]$ ,  $[-2, 2]$ ,  $[-1, 1]$ ,  $[-3, 3]$ ,  $[-1, 1]$ . Pertanto la matrice  $Q$  di covarianza di  $\varepsilon$  è

$$Q = \text{diag} (0.333 \quad 1.333 \quad 0.333 \quad 3. \quad 0.333)$$

Le variabili  $x$  sono uniformemente distribuite rispettivamente negli intervalli  $[-10, 10]$ ,  $[-1, 1]$ ,  $[-4, 4]$ ,  $[-3, 3]$ ,  $[-4, 4]$ ,  $[-20, 20]$ ,  $[-8, 8]$ . pertanto la matrice  $R$  di covarianza di  $x$  è

$$R = \text{diag} (33.33 \quad 0.3333 \quad 5.333 \quad 3. \quad 5.333 \quad 133.3 \quad 21.33)$$

Applicando (10) si ottiene

$$\Theta = \begin{pmatrix} -0.021 & -0.054 & 0.156 & 0.305 & -0.11 \\ 0 & 0.024 & -0.038 & 0.002 & -0.007 \\ 0.073 & 0.281 & -0.57 & -0.057 & 0.009 \\ -0.023 & -0.265 & 0.367 & -0.101 & 0.315 \\ -0.04 & -0.151 & 0.246 & -0.03 & 0.163 \\ 0.24 & 0.038 & -0.024 & -0.149 & -0.081 \\ -0.31 & 0.136 & 0.131 & 0.045 & 0.167 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0.543 & -0.066 & -0.144 & 0.201 & -1.038 & -0.454 & 0.331 \\ -0.066 & 0.317 & -0.227 & 0.061 & 0.031 & 0.212 & -0.247 \\ -0.144 & -0.227 & 0.477 & -0.348 & 0.256 & -0.007 & 0.112 \\ 0.201 & 0.061 & -0.348 & 0.605 & -1.138 & -0.266 & 0.216 \\ -1.038 & 0.031 & 0.256 & -1.138 & 4.626 & 1.224 & -1.133 \\ -0.454 & 0.212 & -0.007 & -0.266 & 1.224 & 0.55 & -0.499 \\ 0.331 & -0.247 & 0.112 & 0.216 & -1.133 & -0.499 & 0.538 \end{pmatrix}$$



Supponiamo di simulare le variabili  $x$  e gli errori  $\varepsilon$  e di ottenere ad esempio:

$$x = (-6.978 \quad -0.686 \quad -1.827 \quad -0.141 \quad 2.955 \quad 15.8 \quad 6.083)$$

$$y = (38.232 \quad 85.842 \quad 54.231 \quad -27.587 \quad 4.433)$$

da cui

$$\hat{x} = \Theta y = (-5.888 \quad -0.088 \quad -2.336 \quad 0.507 \quad 0.478 \quad 14.876 \quad 6.469) \quad (13)$$

Si può pervenire alla stessa stima procedendo ricorsivamente. Inizialmente  $\hat{x} = 0$  e  $\Delta = R$ . La prima osservazione è  $y_1 = W_1 x + \varepsilon_1$ . Possiamo applicare (11) (dove  $W$  è in realtà  $W_1$ ) e ottenere  $\hat{x} = (1.549, -0.005, 0.165, 0.092, 0., 8.263, 0.)$ . Questa è la stima ottima tenendo conto solo della prima osservazione. Inoltre applicando (12) si aggiorna  $\Delta$ . Sia ora disponibile la seconda osservazione  $y_2 = W_2 x + \varepsilon_2$ . Riapplicando (11) (dove  $W$  è  $W_2$ ) si ottiene  $\hat{x} = (-2.926, 0.059, -0.471, -0.534, 0., 12.27, 7.649)$ . Continuando così si ottengono le seguenti stime:

$$\hat{x} = (-4.568, -0.065, -2.553, -0.566, 0., 14.536, 6.244)$$

$$\hat{x} = (-5.520, -0.063, -2.364, -0.545, -0.066, 15.144, 5.908)$$

$$\hat{x} = (-5.888, -0.088, -2.336, 0.507, 0.478, 14.876, 6.469)$$

l'ultima delle quali coincide appunto con (13). È interessante confrontare i due approcci dal punto di vista della complessità computazionale. Nel primo caso si deve risolvere un sistema lineare di ordine  $n$  (numero di osservazioni) ed eseguire due prodotti matrice per vettore. Il calcolo è quindi dell'ordine  $O(n^3)$ . Nel secondo caso ad ogni osservazione il calcolo richiesto riguarda essenzialmente il prodotto  $\Delta W'$  ( $O(m^2)$ ) in quanto l'inversione è in realtà una divisione per un numero. L'aggiornamento di  $\Delta$ , tenendo conto che si deve sommare una matrice di rango uno, richiede solamente  $O(m^2)$  calcoli. Tenendo conto delle  $n$  osservazioni si perviene ad una complessità di  $O(nm^2)$ . Come si vede il secondo approccio è più conveniente se il numero di osservazioni è superiore al numero di variabili da stimare. ■

Supponiamo ora che le osservazioni riguardino un sistema dinamico governato dalle seguenti equazioni:

$$x(k+1) = Ax(k) + \varepsilon(k)$$

dove  $x(k)$  è lo stato del sistema al tempo  $k$  e  $\varepsilon(k)$  è un vettore che rappresenta un rumore. Lo stato non viene osservato direttamente ma tramite delle variabili  $y(k)$  secondo le equazioni:

$$y(k) = Wx(k) + \eta(k)$$

dove  $W$  rappresenta il legame fra osservazioni e stato ed  $\eta(k)$  rappresenta l'errore di osservazione. Si suppone che  $E[\varepsilon(k)\eta(j)'] = 0, \forall k, j, E[x(k)\eta(j)'] = 0, \forall k, j, E[x(k)\varepsilon(j)'] = 0, \forall k, j, E[\varepsilon(k)\varepsilon(j)'] = 0, \forall k \neq j, E[\eta(k)\eta(j)'] = 0, \forall k \neq j$ . Siano note ed invarianti rispetto al tempo le matrici di covarianza  $Q = E[\eta(k)\eta(k)']$  e  $P = E[\varepsilon(k)\varepsilon(k)']$ . Inoltre è disponibile una stima iniziale  $\hat{x}(0)$  di  $x(0)$  con relativa covarianza d'errore  $\Delta(0) = E[(\hat{x}(0) - x(0))(\hat{x}(0) - x(0))']$ . Vogliamo calcolare ricorsivamente una stima di  $x(k)$  a partire dall'osservazione  $y(k)$  e da  $\hat{x}(k-1)$ .

Dapprima si noti che, noto  $\hat{x}(k-1)$ , la stima ottima di  $\hat{x}(k)$  senza ancora tener conto di  $y(k)$  è data da  $A\hat{x}(k-1)$  e la relativa covarianza d'errore da  $\hat{\Delta} = A\Delta(k-1)A' + P$ . Ora si tratta di applicare le formule (11) e (12) che diventano rispettivamente

$$\hat{x}(k) := A\hat{x}(k-1) + \hat{\Delta}W'(W\hat{\Delta}W' + Q)^{-1}(y(k) - W A\hat{x}(k-1)) \quad (14)$$

$$\Delta(k) := \hat{\Delta} - \hat{\Delta}W'(W\hat{\Delta}W' + Q)^{-1}W\hat{\Delta} \quad (15)$$

62 ESEMPIO. Sia dato il seguente sistema dinamico:

$$\begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 \\ -0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1^k \\ \varepsilon_2^k \end{pmatrix}$$

$$y^k = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{pmatrix} + \eta^k$$

dove  $\varepsilon_1^k$  è uniformemente distribuita nell'intervallo  $[-0.2, 0.2]$ ,  $\varepsilon_2$  nell'intervallo  $[-0.3, 0.3]$  e  $\eta$  nell'intervallo  $[-0.2, 0.2]$ . Quindi

$$P = \begin{pmatrix} 0.0133 & 0 \\ 0 & 0.03 \end{pmatrix} \quad P = (0.0133)$$

Sia  $x^0 = (1, 1)$  lo stato iniziale. Supponiamo che lo stato iniziale sia ignoto. Pertanto useremo una stima arbitraria di  $x^0$  ed un valore iniziale di  $\Delta$  molto alto. Ad esempio possiamo fissare  $\Delta^0 = \text{diag}(100, 100)$  e  $(0, 0)$  come stima iniziale dello stato. Tuttavia è disponibile l'osservazione  $y^0$  dello stato  $x^0$  e quindi possiamo calcolare la stima  $\hat{x}^0$  sfruttando  $y^0$  e (14) dove  $\hat{x}^{-1} = (0, 0)$ . Facciamo prima vedere quale sarebbe la situazione in assenza di rumore di stato e di errore di osservazione. Nella Figura 4 si vede l'evoluzione dello stato per i primi 40 passi di iterazione (linea continua) e l'evoluzione della stima (linea tratteggiata). Come si vede anche se solo uno stato è direttamente osservabile è possibile conoscere tutti e due gli stati sfruttando l'informazione di due osservazioni successive. Infatti già alla seconda osservazione la stima 'aggancia' lo stato e da lì in poi i due valori sono identici.

Nella Figura 5 si mostra l'evoluzione che si avrebbe se solo il rumore di stato fosse nullo. Come si vede al crescere del numero di iterazioni l'informazione accumulata, anche se le singole osservazioni sono imprecise, è tuttavia sufficiente ad ottenere un'accurata stima dello stato.

Infine in Figura 6 si vede la situazione 'reale'. Avendo lo stato un'evoluzione in parte imprevedibile, la stima 'insegue' costantemente lo stato. Per apprezzare la qualità della stima ottenuta si noti che è stato scelto un valore abbastanza alto di rumore, circa il 20% del valore dello stato (e altrettanto dicasi per l'errore di osservazione). Quindi il valore della stima va considerato molto accurato.

## 5 – Spazi duali

Un funzionale lineare su uno spazio vettoriale  $X$  è una funzione  $f : X \rightarrow K$  (dove  $K$  è il corpo associato ad  $X$ ) tale che  $f(\alpha x) = \alpha f(x)$  e  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ . L'insieme dei funzionali lineari su uno spazio vettoriale costituisce a sua volta uno spazio vettoriale che viene chiamato *duale algebrico* di  $X$ . Infatti se  $f$  e  $g$  sono funzionali lineari definiamo  $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$  e  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  e si vede che  $(\alpha f)$  e  $(f + g)$  sono funzionali lineari.

63 ESEMPIO. In  $\mathbb{R}^n$  ogni funzionale lineare è identificato da un' $n$ -pla di numeri. Infatti, siccome ogni elemento di  $\mathbb{R}^n$  può essere rappresentato secondo una base  $e_1, \dots, e_n$ , si ha  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$  e quindi  $f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(e_i)$  (per la linearità di  $f$ ), da cui si vede che  $f$  è rappresentato dall' $n$ -pla  $f(e_1), \dots, f(e_n)$ . Quindi il duale algebrico di  $\mathbb{R}^n$  è ancora  $\mathbb{R}^n$ . ■

64 ESEMPIO. Se  $X$  è uno spazio di funzioni definite su un intervallo  $[a, b]$ , l'operazione di calcolare il valore di una funzione  $x$  dello spazio nel punto  $c \in [a, b]$  definisce un funzionale lineare  $x \mapsto x(c)$ . ■

65 TEOREMA. *Un funzionale lineare  $f$  su uno spazio normato  $X$  è continuo se è continuo in un elemento qualsiasi di  $X$ .*

DIMOSTRAZIONE: Sia  $y$  l'elemento in cui  $f$  è continuo. Sia  $z$  un elemento qualsiasi. Quindi qualsiasi  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che  $\|(x - z + y) - y\| < \delta$  implica  $|f(x - z + y) - f(y)| < \varepsilon$  da cui, in virtù della linearità, la continuità anche in  $z$ . ■

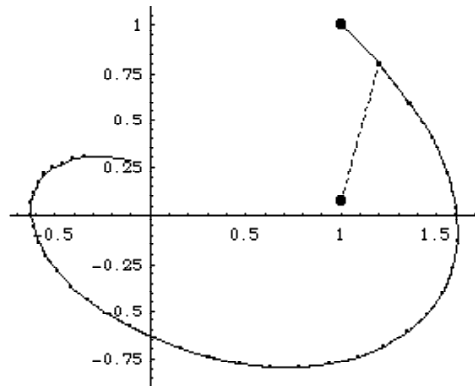


Figura 4

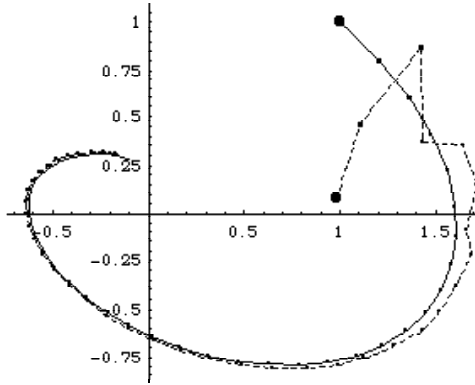


Figura 5

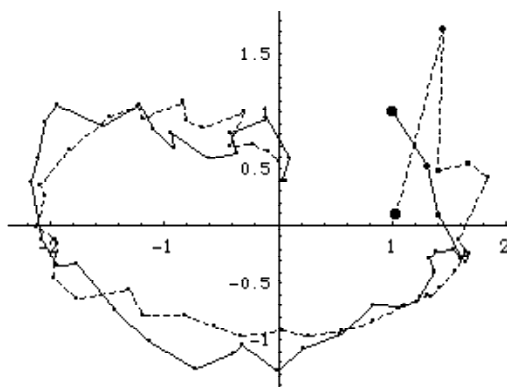


Figura 6

66 DEFINIZIONE. *Un funzionale lineare su uno spazio normato  $X$  si dice limitato se esiste  $K < \infty$  tale che  $f(x) \leq K \|x\|$ .* ■

67 TEOREMA. *Un funzionale lineare su uno spazio normato  $X$  è continuo se e solo se è limitato.*

DIMOSTRAZIONE: Sia  $f$  limitato. Fissato  $\varepsilon > 0$  basta prendere  $\delta = \varepsilon/K$  per dimostrare la continuità nell'origine e quindi in ogni punto. Se  $f$  è continuo esiste  $\delta > 0$  tale che  $f(x) \leq 1$  per ogni  $x$  tale che  $\|x\| \leq \delta$ . Sia  $x$  arbitrario. Allora

$$f(x) = f\left(\frac{\|x\|}{\delta} \delta \frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{\|x\|}{\delta} f\left(\delta \frac{x}{\|x\|}\right) \leq \frac{\|x\|}{\delta}$$

e quindi basta prendere  $K = 1/\delta$ . ■

68 ESEMPIO. Ogni funzionale lineare su  $\mathbb{R}^n$  è continuo. ■

69 ESEMPIO. Sia  $X = C[a, b]$ . Allora  $f(x) = x(c)$  con  $c \in [a, b]$  è continuo. Infatti  $|x(c)| \leq \sup_{t \in [a, b]} |x(t)| = \|x\|$ . ■

70 ESEMPIO. Sia  $X = L_1[a, b]$ . In questo caso  $f(x) = x(c)$  non è continuo. Si consideri ad esempio la successione di funzioni

$$x_k(t) = \begin{cases} k & c - \frac{1}{2k} \leq t \leq c + \frac{1}{2k} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Come si vede  $\|x_k\| = 1$  per ogni  $k$  mentre  $x_k(c) = k$ . ■

71 DEFINIZIONE. *Sia  $X$  uno spazio normato. Lo spazio normato dei funzionali lineari continui su  $X$  con norma definita da  $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|/\|x\|$  viene chiamato spazio duale di  $X$  ed indicato come  $X^*$ .* ■

Uno spazio duale  $X^*$  è sempre completo anche se  $X$  non lo è. Vale infatti il seguente teorema:

72 TEOREMA.  *$X^*$  è uno spazio di Banach.* ■

Nel seguito indicheremo gli elementi di  $X^*$  come  $x^*$  e con  $x^*x$  lo scalare ottenuto applicando il funzionale  $x^*$  all'elemento  $x$ . Per la definizione di norma di  $x^*$  si ha che  $|x^*x| \leq \|x^*\| \|x\|$ .

73 DEFINIZIONE. *Un elemento  $x \in X$  ed un elemento  $x^* \in X^*$  si dicono allineati se  $x^*x = \|x^*\| \|x\|$ .* ■

74 DEFINIZIONE. *Sia  $X$  spazio normato e  $M$  un suo sottoinsieme. Si definisce complemento ortogonale a  $M$  il sottospazio  $\{x^* \in X^* : x^*x = 0, \forall x \in M\}$  e si indica  $M^\perp$ . Sia  $N$  un sottoinsieme di  $X^*$ . Si definisce complemento ortogonale in  $X$  a  $N$  il sottospazio  $\{x \in X : x^*x = 0, \forall x^* \in N\}$  e si indica  ${}^\perp N$ .* ■

Ci si può chiedere se esiste un elemento  $x$  allineato con un fissato elemento  $x^*$  o viceversa se esiste un elemento  $x^*$  allineato con un fissato elemento  $x$ . La risposta a questa domanda viene da uno dei più importanti risultati dell'analisi funzionale, il teorema di Hahn-Banach.

75 TEOREMA. *(corollario del teorema di Hahn-Banach) Sia  $X$  uno spazio normato,  $S$  un sottospazio di  $X$  ed  $f$  un funzionale lineare definito su  $S$ . Se  $f$  è limitato su  $S$ , cioè esiste  $K$  tale che  $f(x) \leq K\|x\|$  per ogni  $x \in S$ , allora esiste un funzionale lineare  $\tilde{f}$  definito su  $X$  tale che  $\tilde{f}(x) = f(x)$  per ogni  $x \in S$  e  $\tilde{f}(x) \leq K\|x\|$  per ogni  $x \in X$ .* ■

Quindi ogni funzionale lineare limitato su un sottospazio è sempre estendibile ad un funzionale continuo su tutto lo spazio con la medesima norma. In particolare fissato un elemento  $\hat{x} \in X$  si può definire un funzionale lineare sul sottospazio unidimensionale  $S$  generato da  $\hat{x}$  come  $f(\alpha\hat{x}) = \alpha\|\hat{x}\|$ . Tale funzionale è limitato su  $S$  con norma unitaria. Quindi dal teorema di Hahn-Banach esiste  $x^*$  tale che  $\|x^*\| = 1$  ed inoltre  $x^*\hat{x} = \|x^*\| \|\hat{x}\|$ . Quindi l'esistenza di un elemento duale allineato con un elemento primale è sempre garantita. Invece può darsi che non esista un elemento primale allineato con un elemento duale.

76 ESEMPIO. Come già osservato il duale algebrico di  $\mathbb{R}^n$  è ancora  $\mathbb{R}^n$ . Tuttavia la particolare norma definita su  $\mathbb{R}^n$  induce in generale una norma diversa sul duale. Ad esempio se in  $\mathbb{R}^n$  è definita una norma  $\|\cdot\|_p$  risulta che nel duale la norma indotta è  $\|\cdot\|_q$  con  $1/p + 1/q = 1$  (incluso il caso  $p = \infty$  o  $q = \infty$ ). Fissato un elemento  $x$  di norma  $\|x\|_1$  un elemento  $x^*$  di norma  $\|x^*\|_\infty$  ed allineato con  $x$  ha coordinate  $x_i^* = \alpha \operatorname{sgn} x_i$ , con  $\alpha \geq 0$  arbitrario, se  $x_i \neq 0$ , e  $x_i^* \in [-\alpha, \alpha]$  arbitrario altrimenti. Viceversa fissato un elemento  $x$  di norma  $\|x\|_\infty$  un elemento  $x^*$  di norma  $\|x^*\|_1$  ed allineato con  $x$  ha coordinate  $x_i^* = \alpha_i \operatorname{sgn} x_i$ , con  $\alpha_i \geq 0$  arbitrario, se  $|x_i| = \|x\|$  e  $x_i^* = 0$  altrimenti.

Se la norma in  $\mathbb{R}^n$  è  $\sqrt{x^T Q x}$  con  $Q$  matrice positiva definita allora la norma nel duale è  $\sqrt{x^{*T} Q^{-1} x^*}$ . In questo caso due elementi allineati  $x$  e  $x^*$  sono legati dalla relazione  $x^* = \alpha Q x$  con  $\alpha$  costante arbitraria.

Se ancora la norma è definita come  $\|x\| = \inf \{\alpha : (1/\alpha)x \in K\}$  con  $K$  corpo convesso contenente l'origine, la norma duale è data da  $\|x^*\| = \inf \{\alpha : (1/\alpha)x \in K^*\}$  con  $K^*$  insieme polare di  $K$ . Si noti che in questo caso

$$\sup_{x \in X} \frac{|x^* x|}{\|x\|} = \sup_{x \in K} x^* x$$

e quindi fissato  $x$ ,  $x^*$  è allineato con  $x$  se  $x^*$  definisce il piano di supporto a  $K$  in  $\alpha x$  dove  $\alpha$  è tale che  $\alpha x \in \partial K$ . ■

77 ESEMPIO. Si può dimostrare che il duale di  $l_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , è  $l_q$ , con  $q$  tale che  $1/p + 1/q = 1$ . In particolare  $l_\infty$  è il duale di  $l_1$ . Però  $l_1$  non è il duale di  $l_\infty$ . Se  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$  e  $x^* = (\eta_1, \eta_2, \dots)$  allora  $x^* x = \sum \xi_i \eta_i$ . In questo caso  $x^*$  è allineato con  $x$  se  $\eta_i = \alpha \operatorname{sgn} \xi_i$  con  $\alpha \geq 0$  arbitrario. ■

78 ESEMPIO. Il duale di  $c_0$  è  $l_1$  (di facile dimostrazione). Dato  $x \in c_0$ , un elemento  $x^* \in l_1$  allineato con  $x$  è costituito da una successione con uniche componenti non nulle pari a  $\eta_i = \alpha_i \operatorname{sgn} \xi_i$  (con  $\alpha_i \geq 0$  arbitrario) in corrispondenza degli indici  $i$  tali che  $|\xi_i| = \|x\| = \max |\xi_k|$ . Siccome  $c_0$  è costituito da successioni tendenti a zero, tali componenti sono in numero finito. ■

79 ESEMPIO. Si può dimostrare che il duale di  $L_p[a, b]$ ,  $1 \leq p < \infty$ , è  $L_q[a, b]$ , con  $q$  tale che  $1/p + 1/q = 1$ . In particolare  $L_\infty[a, b]$  è il duale di  $L_1[a, b]$ . Però  $L_1[a, b]$  non è il duale di  $L_\infty[a, b]$ . Inoltre

$$x^* x = \int_a^b x^*(t) x(t) dt$$

Fissata una funzione  $x \in L_1[a, b]$ , una funzione  $x^* \in L_\infty[a, b]$  ed allineata con  $x$  è definita da  $x^*(t) = \alpha \operatorname{sgn} x(t)$  con  $\alpha \geq 0$  arbitrario. Si vedano in Figura 7 due funzioni allineate, dove la funzione costante a tratti è quella in  $L_\infty[a, b]$ . Se  $p \neq 1$  allora  $x$  e  $x^*$  sono allineate se sono legate dalla relazione:  $x(t) = \alpha (\operatorname{sgn} x^*(t)) |y(t)|^{q/p}$ . ■

80 ESEMPIO. Il duale di  $C[a, b]$  è un sottospazio di  $BV[a, b]$  (vedi Esempio 24). Infatti si può dimostrare (teorema di rappresentazione di Riesz), sfruttando il teorema di Hahn-Banach, che ogni funzionale lineare su  $C[a, b]$  si può rappresentare come

$$x^* x = \int_a^b x(t) dx^*(t)$$

dove l'integrale è di Lebesgue-Stieltjes e  $x^*(t)$  è una funzione a variazione totale limitata su  $[a, b]$ , cioè un elemento di  $BV[a, b]$ . La rappresentazione è tuttavia ridondante in quanto elementi di  $BV[a, b]$  che differiscono per un valore costante danno luogo al medesimo funzionale. Inoltre nei punti di discontinuità di  $x^*(t)$  ciò che conta nell'integrale è il salto di discontinuità e non tanto il valore di  $x^*(t)$  nel punto di discontinuità. Per rimuovere questa ridondanza possiamo identificare lo spazio duale di  $C[a, b]$  con il sottospazio di  $BV[a, b]$  di funzioni a variazione totale limitata a valore 0 in  $a$  e continue dalla destra su  $(a, b)$ . Tale spazio viene indicato come  $NBV[a, b]$  ('normalized bounded variation').

Fissata una funzione  $x \in C[a, b]$ , una funzione  $x^* \in NBV[a, b]$  allineata con  $x$  è una funzione che varia soltanto sull'insieme  $\{t \in [a, b] : |x(t)| = \|x\|\}$ . In particolare su  $\{t \in [a, b] : x(t) = \|x\|\}$   $x^*$  deve essere non decrescente e su  $\{t \in [a, b] : x(t) = -\|x\|\}$  deve essere non crescente. Si vedano nelle Figure 8 e 9 due esempi di allineamento fra  $C[a, b]$  e  $NBV[a, b]$ . ■

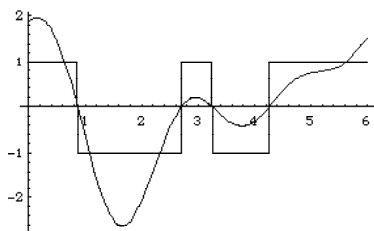


Figura 7

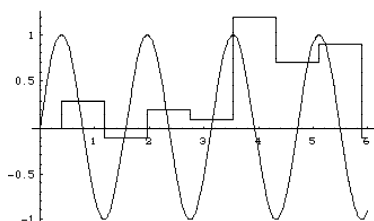


Figura 8

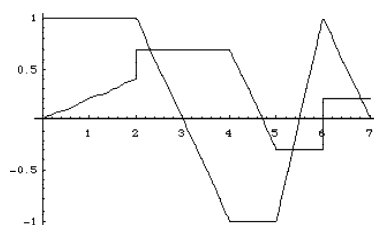


Figura 9

81 ESEMPIO. Se  $H$  è uno spazio di Hilbert, il celebre teorema di Riesz-Fréchet stabilisce che il duale di  $H$  è ancora  $H$  stesso e che  $x^*x = (x, x^*)$ . In questo caso ovviamente  $x$  e  $x^*$  sono allineati se e solo se  $x = \alpha x^*$  con  $\alpha \geq 0$ . ■

82 DEFINIZIONE. Dato uno spazio vettoriale  $X$ , una varietà lineare propria e massimale, viene detta iperpiano (o più brevemente piano). ■

Piani e funzionali lineari sono strettamente collegati dal seguente risultato:

83 TEOREMA. Se  $H$  è un piano in uno spazio vettoriale  $X$  allora esistono un funzionale lineare su  $X$  ed uno scalare  $\alpha$  tale che  $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$ . Viceversa dati un funzionale lineare non nullo  $f$  ed uno scalare  $\alpha$  l'insieme  $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$  è un piano. ■

84 TEOREMA. Sia  $f$  un funzionale lineare su uno spazio normato  $X$ . Allora  $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$  è chiuso se e solo se  $f$  è continuo. ■

Un piano separa gli elementi di uno spazio  $X$  nel senso che un insieme  $A$  è separato da un insieme  $B$  se  $f(x) \leq \alpha$  per ogni  $x \in A$  e  $f(x) \geq \alpha$  per ogni  $x \in B$ . Il teorema di Hahn-Banach garantisce la separabilità di un elemento  $\hat{x}$  dall'insieme  $K = \{x \in X : \|x\| < \|\hat{x}\|\}$ . Infatti se  $\hat{x}^*$  è allineato con  $\hat{x}$  si ha  $\hat{x}^*\hat{x} = \|\hat{x}^*\| \|\hat{x}\|$ . Inoltre si ha  $\hat{x}^*x \leq \|\hat{x}^*\| \|x\| < \|\hat{x}^*\| \|\hat{x}\|$  per ogni  $x \in K$  e quindi  $\hat{x}$  e  $K$  sono separati dal piano  $\{x : \hat{x}^*x = \|\hat{x}^*\| \|\hat{x}\|\}$ . Questo risultato si può estendere ad un generico insieme convesso  $K$  purché  $K$  possieda un interno non vuoto, cioè esista un elemento  $y \in K$  ed un intorno  $N(y) \subset K$ , ovvero esista  $\varepsilon > 0$  tale che  $\{x : \|x - y\| < \varepsilon\} \subset K$ . Il seguente teorema di separazione è fondamentale nella caratterizzazione degli ottimi. Bisogna notare che una delle ipotesi, cioè l'esistenza di punti interni, che in  $\mathbb{R}^n$  può essere

facilmente rimossa in quanto l'interno relativo non è mai vuoto, diventa invece molto restrittiva in alcuni spazi infinito dimensionali e può quindi diventare determinante nella scelta dello spazio in cui modellare un problema.

85 TEOREMA. *Siano  $A$  e  $B$  due insiemi convessi in uno spazio normato  $X$  tali che  $A$  ha punti interni e  $B$  non contiene punti interni di  $A$ . Allora esiste un piano chiuso che separa  $A$  da  $B$ , cioè esiste  $\hat{x}^* \in X^*$  tale che  $\sup_{x \in B} \hat{x}^* x \leq \inf_{x \in A} \hat{x}^* x$ .* ■

Varietà lineari, non necessariamente massimali, vengono normalmente indotte da operatori lineari, di cui ora daremo una breve caratterizzazione.

86 DEFINIZIONE. *Dati due spazi vettoriali  $X$  e  $Y$  (ai quali sia associato lo stesso corpo) e un sottospazio  $D \subset X$ , un operatore lineare  $T : X \rightarrow Y$  è una funzione tale che  $T(\alpha x) = \alpha(Tx)$ ,  $\forall \alpha, x \in D$ , e  $T(x_1 + x_2) = (Tx_1) + (Tx_2)$ ,  $\forall x_1, x_2 \in D$ . Il sottospazio  $D$  prende il nome di dominio di  $T$ , viene indicato  $\mathcal{D}(T)$  ed è normalmente definito come il sottospazio massimale su cui l'operatore  $T$  può essere definito. Il sottospazio  $T(D) \subset Y$  prende il nome di immagine di  $T$  e viene indicato  $\mathcal{R}(T)$ . Il sottospazio  $\{x \in D : Tx = \mathbf{0}\} \subset X$  prende il nome di nucleo oppure spazio nullo di  $T$  e viene indicato  $\mathcal{N}(T)$ .* ■

87 DEFINIZIONE. *Dato un operatore lineare  $T : X \rightarrow Y$ , se  $\mathcal{R}(T) = Y$  e  $\mathcal{N}(T) = \mathbf{0}$  allora l'operatore inverso  $T^{-1} : Y \rightarrow X$  di  $T$  è definito da  $T^{-1}y = \{x \in X : Tx = y\}$ . L'operatore inverso di un operatore lineare è lineare.* ■

88 DEFINIZIONE. *Un operatore lineare  $T : X \rightarrow Y$  si dice limitato se esiste una costante  $K < \infty$  tale che  $\|Tx\| \leq K \|x\|$  per ogni  $x \in \mathcal{D}(T)$ .* ■

89 TEOREMA. *Un operatore lineare  $T : X \rightarrow Y$  è continuo se è continuo in un elemento qualsiasi di  $\mathcal{D}(T)$ . Inoltre un operatore lineare è continuo se e solo se è limitato.* ■

90 TEOREMA. (Banach) *Se un operatore lineare è definito su spazi di Banach ed è continuo, allora anche l'operatore inverso è continuo.* ■

L'insieme degli operatori lineari continui da uno spazio normato  $X$  ad uno spazio normato  $Y$  costituisce a sua volta uno spazio normato con norma definita da

$$\|T\| = \sup \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

Tale spazio viene indicato con  $B(X, Y)$  ed è completo se  $Y$  è completo (non è richiesta la completezza di  $X$ ). Notiamo di sfuggita che lo spazio  $B(X, X)$  ha una struttura più 'ricca' di un generico spazio normato in quanto fra due elementi è possibile definire un'operazione di prodotto tramite  $(T \cdot S)x = T(S(x))$  per la quale inoltre vale la proprietà  $\|TS\| \leq \|T\| \|S\|$ .

91 ESEMPIO. L'operatore  $T : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  definito da

$$(Tx)(t) = \int_a^t x(s) ds$$

è certamente lineare. Inoltre

$$|(Tx)(t)| \leq \int_a^t |x(s)| ds \leq \int_a^t \max_{r \in [a, b]} |x(r)| ds \leq (b-a) \|x\|$$

quindi  $\|Tx\| \leq (b-a) \|x\|$  e siccome la disuguaglianza è verificata come eguaglianza per una funzione costante, risulta  $\|T\| = (b-a)$ . L'immagine di  $T$  è il sottospazio di  $C[a, b]$  costituito dalle funzioni derivabili. Il nucleo di  $T$  è dato soltanto dall'origine. ■

92 ESEMPIO. L'operatore  $D : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  definito da  $(Dx)(t) = d/dt x(t)$  è lineare. Il suo dominio è costituito dal sottospazio di  $C[a, b]$  di funzioni derivabili. La sua immagine è  $C[a, b]$  e il nucleo è costituito dal sottospazio di funzioni costanti. Si tratta di un operatore non continuo. Infatti si consideri la successione  $x_k(t) = ((t-a)/(b-a))^k$ . Come si vede  $\|x_k\| = 1$  mentre  $\|Dx_k\| = k/(b-a)$ . Tuttavia se definiamo lo spazio  $D[a, b]$  di funzioni derivabili su  $[a, b]$  con norma  $\|x\|_1 = \max_{t \in [a, b]} |x(t)| + \max_{t \in [a, b]} |x'(t)|$ , allora lo stesso operatore  $D : D[a, b] \rightarrow C[a, b]$  è continuo con norma unitaria. Infatti si ha ovviamente  $\|D\| \leq 1$  ed inoltre per ogni  $\varepsilon > 0$  si può definire la funzione  $x_\varepsilon(t) = \varepsilon \sin(t/\varepsilon)$  per la quale  $\|Dx_\varepsilon\|/\|x_\varepsilon\| = 1/(1+\varepsilon) > 1-\varepsilon$ . ■

93 ESEMPIO. L'operatore  $K : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  definito da

$$(Kx)(t) = \int_a^b K(t, s) x(s) ds$$

con  $K(t, s)$  funzione continua è continuo con norma

$$\max_{t \in [a, b]} \int_a^b |K(t, s)| ds.$$

94 ESEMPIO. L'operatore  $A : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  definito da  $x(t) \mapsto a(t)x(t)$  con  $a$  funzione continua su  $[a, b]$  è lineare e limitato con norma  $\max |a(t)|$ . Si noti che in generale  $\mathcal{R}(A) \neq C[a, b]$  e  $\mathcal{N}(A) \neq \mathbf{0}$  (perché?). ■

L'esistenza di un operatore lineare fra due spazi induce l'esistenza di un altro operatore lineare fra gli spazi duali. Se  $A : X \rightarrow Y$  è un operatore lineare allora si definisce operatore *aggiunto* l'operatore  $A^* : Y^* \rightarrow X^*$  tale che:

$$y^*(Ax) = (A^*y^*)x \quad \forall x \in X, \forall y^* \in Y^*$$

95 TEOREMA. L'operatore aggiunto soddisfa le seguenti proprietà:

- $(A_1 + A_2)^* = A_1^* + A_2^*$ ;
- $(\alpha A)^* = \alpha A^*$  (per spazi reali);
- $(A_1 \cdot A_2)^* = A_2^* \cdot A_1^*$ ;
- $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$  (se l'inversa esiste ed è continua);
- $\|A\| = \|A^*\|$ ;
- $\mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^*)$ ;
- $\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{N}(A)^\perp$  se  $\mathcal{R}(A)$  è chiuso.

96 ESEMPIO. L'operatore aggiunto dell'operatore integrale dell'Esempio 91 si ottiene da:

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^t x(s) ds dy^*(t) &= \int_a^b \int_a^b \mu(t-s) x(s) ds dy^*(t) = \\ & \text{(con } \mu(t) := \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \text{)} \\ &= \int_a^b x(s) \int_a^b \mu(t-s) dy^*(t) ds = \int_a^b x(s) \int_s^b dy^*(t) ds = \int_a^b x(s) (y^*(b) - y^*(s)) ds \end{aligned}$$

Quindi l'operatore aggiunto trasforma una funzione  $y^* \in NBV[a, b]$  nella funzione

$$(t-a)y^*(b) - \int_a^t y^*(s) ds$$



97 ESEMPIO. Ogni operatore lineare  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  si può rappresentare come una matrice. Infatti sia  $e_1, \dots, e_n$  una base in  $\mathbb{R}^n$  e  $e'_1, \dots, e'_m$  una base in  $\mathbb{R}^m$ . Sia  $A(e_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} e'_i$ . Allora si ha

$$Ax = A \sum_{j=1}^n \xi_j e_j = \sum_{j=1}^n \xi_j A(e_j) = \sum_{j=1}^n \xi_j \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} e'_i = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j \right) e'_i = \sum_{i=1}^m \eta_i e'_i = y$$

e quindi ogni operatore lineare è rappresentato dalla matrice  $\{\alpha_{ij}\}$  che agisce sull' $n$ -pla  $\{\xi_j\}$ , rappresentante  $x$  e produce l' $m$ -pla  $\{\eta_i\}$  rappresentante  $y$ . È immediato vedere che l'operatore aggiunto è rappresentato dalla matrice trasposta (traspota e coniugata se lo spazio è complesso).

La norma viene indotta da quelle degli spazi dominio e immagine. Se è definita la norma  $\|\cdot\|_2$  in ambedue gli spazi allora  $\|A\|$  è uguale al massimo degli autovalori di  $A^T A$ . Se  $X$  e  $Y$  hanno norma  $\|\cdot\|_1$  allora  $\|A\| = \max_j \sum_i |\alpha_{ij}|$ . Se  $X$  e  $Y$  hanno norma  $\|\cdot\|_\infty$  allora  $\|A\| = \max_i \sum_j |\alpha_{ij}|$ . Se  $X$  ha norma  $\|\cdot\|_1$  e  $Y$  ha norma  $\|\cdot\|_\infty$  allora  $\|A\| = \max_{ij} |\alpha_{ij}|$ . Se  $X$  ha norma  $\|\cdot\|_\infty$  e  $Y$  ha norma  $\|\cdot\|_1$  risulta  $\|A\| = \max y^T Ax$  con  $\|x\|_\infty \leq 1$ ,  $\|y\|_1 \leq 1$ . ■

98 ESEMPIO. L'operatore aggiunto dell'operatore dell'Esempio 94 è:

$$A^* : NBV[a, b] \rightarrow NBV[a, b]; \quad y^*(t) \mapsto \int_a^t a(s) dy^*(s)$$

99 ESEMPIO. Sia  $K : L_2[a, b] \rightarrow L_2[a, b]$  definito da

$$(Kx)(t) = \int_a^b K(t, s) x(s) ds$$

allora

$$(K^*y)(t) = \int_a^b K(s, t) x(s) ds$$

100 ESEMPIO. Sia  $A : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  definito da  $x(t) \mapsto (x(t_1), \dots, x(t_m))$  dove  $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq b$  sono punti prefissati. Allora  $A^* : \mathbb{R}^m \rightarrow NBV[a, b]$  e da

$$\sum_i y_i^* x(t_i) = \int_a^b x(t) dx^*(t)$$

si vede che  $x^*$  deve essere una funzione costante a tratti con salti di discontinuità in  $t_i$  pari a  $y_i^*$ . ■

## 6 – Problemi a norma minima in spazi di Banach

Sia  $K$  un insieme convesso in uno spazio normato  $X$ . A  $K$  si può associare un funzionale su  $X^*$  tramite la seguente definizione.

101 DEFINIZIONE. Il funzionale  $\varphi(x^*) := \sup_{x \in K} x^*x$  viene detto funzionale di supporto a  $K$ . ■

Il funzionale di supporto è convesso e per alcuni valori di  $x^*$  può assumere valore infinito. Se  $K$  è la sfera unitaria in  $X$  allora il funzionale di supporto è semplicemente la norma di  $X^*$ .

102 TEOREMA. Sia  $K$  un insieme convesso di uno spazio normato  $X$  e sia  $y \in X$  un elemento assegnato a distanza  $d > 0$  da  $K$ . Si indichi inoltre con  $S^*$  la sfera unitaria in  $X^*$ . Allora:

$$d = \inf_{x \in K} \|y - x\| = \max_{x^* \in S^*} (x^*y - \varphi(x^*))$$

Il massimo viene raggiunto da un elemento  $\hat{x}^* \in S^*$ . Se l'infimo viene raggiunto da un elemento  $\hat{x} \in K$  allora  $(y - \hat{x})$  e  $\hat{x}^*$  sono allineati.

DIMOSTRAZIONE: Dapprima vogliamo dimostrare che vale una relazione di  $\geq$  fra l'inf di sinistra e il max di destra. Certamente tale relazione è vera se  $\varphi(x^*) \geq x^*y$ . Se  $\varphi(x^*) \leq x^*y$  allora il piano  $x^*x = \varphi(x^*)$  separa  $K$  da  $y$ . Sia inoltre  $\varepsilon(x^*) \geq 0$  il supremo degli  $\varepsilon$  per cui il piano separa  $K$  dalla sfera  $S(\varepsilon)$  di raggio  $\varepsilon$  centrata in  $y$ . Quindi  $\inf_{x \in S(\varepsilon^*)} x^*x = \varphi(x^*)$ . Certamente  $\varepsilon(x^*) \leq d$ . Inoltre  $\inf_{x \in S(\varepsilon)} x^*(x - y) = -\varepsilon \|x^*\|$  (dalla definizione di norma duale). Quindi  $\varphi(x^*) - x^*y = -\varepsilon \|x^*\|$  e, se  $\|x^*\| \leq 1$ ,  $x^*y - \varphi(x^*) \leq d$ . Con questo è dimostrato un semplice risultato di dualità debole. Per dimostrare la dualità forte bisogna fare ricorso al teorema di separazione.

Gli insiemi  $K$  e  $S(d)$  sono convessi. Siccome  $d > 0$  l'interno di  $S(d)$  è non vuoto e  $K$  non contiene punti interni di  $S(d)$ . Si può applicare allora il Teorema 85, per cui esiste  $\hat{x}^* \in S^*$  tale che  $\sup_{x \in K} \hat{x}^*x \leq \inf_{x \in S(d)} \hat{x}^*x$ , cioè  $\varphi(\hat{x}^*) \leq d \|\hat{x}^*\| + \hat{x}^*y$  ovvero  $\hat{x}^*y - \varphi(\hat{x}^*) \geq d$ , imponendo senza perdita di generalità  $\|\hat{x}^*\| = 1$ . Quindi, in base alla precedente dualità debole,  $\hat{x}^*y - \varphi(\hat{x}^*) = d$ .

Se esiste  $\hat{x} \in K$  per cui  $d = \|y - \hat{x}\|$ , si ha  $\|y - \hat{x}\| \leq \hat{x}^*y - \varphi(\hat{x}^*) = \hat{x}^*(y - \hat{x}) + \hat{x}^*\hat{x} - \varphi(\hat{x}^*) \leq \hat{x}^*(y - \hat{x})$ , dove l'ultima disuguaglianza discende dalla definizione di funzionale di supporto a  $K$  e dal fatto che  $\hat{x} \in K$ . Quindi  $\|y - \hat{x}\| \|\hat{x}^*\| \leq \hat{x}^*(y - \hat{x})$  e siccome la disuguaglianza opposta è sempre vera, si ricava l'allineamento fra  $\hat{x}^*$  e  $y - \hat{x}$ . ■

Nel caso particolare in cui  $K$  è un sottospazio il Teorema 102 si specializza a:

103 COROLLARIO. Sia  $K$  un sottospazio di uno spazio normato  $X$  e sia  $y \in X$  un elemento assegnato a distanza  $d > 0$  da  $K$ . Si indichi inoltre con  $S^*$  la sfera unitaria in  $X^*$ . Allora:

$$d = \inf_{x \in K} \|y - x\| = \max_{x^* \in S^* \cap K^\perp} x^*y$$

Il massimo viene raggiunto da un elemento  $\hat{x}^* \in S^* \cap K^\perp$ . Se l'infimo viene raggiunto da un elemento  $\hat{x} \in K$  allora  $(y - \hat{x})$  e  $\hat{x}^*$  sono allineati. ■

Si noti che se  $X$  è di Hilbert il Corollario 103 implica il teorema di proiezione. Si possono inoltre scambiare i ruoli di  $X$  e di  $X^*$  e si ha il seguente risultato:

104 TEOREMA. Sia  $K$  un sottospazio di uno spazio normato  $X$  e sia  $K^\perp$  il suo complemento ortogonale. Sia  $\bar{x}^* \in X^*$  un elemento assegnato a distanza  $d > 0$  da  $K^\perp$ . Si indichi inoltre con  $S$  la sfera unitaria in  $X$ . Allora:

$$d = \min_{x^* \in K^\perp} \|\bar{x}^* - x^*\| = \sup_{x \in S \cap K} \bar{x}^*x$$

Il minimo viene raggiunto da un elemento  $\hat{x}^* \in K^\perp$ . Se il supremo viene raggiunto da un elemento  $\hat{x} \in K$  allora  $\hat{x}$  e  $(\bar{x}^* - \hat{x}^*)$  sono allineati.

DIMOSTRAZIONE: Per ogni  $x^* \in K^\perp$  si ha  $\|\bar{x}^* - x^*\| = \sup_{x \in S} (\bar{x}^* - x^*)x \geq \sup_{x \in S \cap K} (\bar{x}^* - x^*)x = \sup_{x \in S \cap K} \bar{x}^*x$ . Quindi  $\bar{x}^*$  è un funzionale limitato su  $K$  con norma  $\sup_{x \in S \cap K} \bar{x}^*x$ . Per il teorema di Hahn-Banach esiste un funzionale  $z^*$  su tutto  $X$  tale che  $z^* = \bar{x}^*$  su  $K$  e  $\|z^*\| = \sup_{x \in S \cap K} \bar{x}^*x$ . Si indichi  $\hat{x}^* := \bar{x}^* - z^*$ . Allora  $\hat{x}^*x = 0$  per ogni  $x \in K$ , cioè  $\hat{x}^* \in K^\perp$  e  $\|\hat{x}^*\| = \|\bar{x}^* - \hat{x}^*\| = \sup_{x \in S \cap K} \bar{x}^*x$ . La proprietà dell'allineamento si deduce facilmente. ■

Vale inoltre la seguente variante del Teorema 104, in cui anziché cercare un elemento di un sottospazio a distanza minima da un punto dato, si cerca un punto di norma minima di una varietà lineare, noto un elemento della varietà lineare. La dimostrazione si effettua parafrasando quella del Teorema 104 usando traslazioni.

105 TEOREMA. Sia  $K$  un sottospazio di uno spazio normato  $X$  e sia  $K^\perp$  il suo complemento ortogonale. Sia  $\bar{x}^* \in X^*$  un elemento assegnato a distanza  $d > 0$  da  $K^\perp$ . Sia  $M^* = \bar{x}^* + K^\perp$ . Si indichi inoltre con  $S$  la sfera unitaria in  $X$ . Allora:

$$d = \min_{x^* \in M^*} \|x^*\| = \sup_{x \in S \cap K} \bar{x}^* x$$

Il minimo viene raggiunto da un elemento  $\hat{x}^*$  tale che  $\hat{x}^* - \bar{x}^* \in K^\perp$ . Se il supremo viene raggiunto da un elemento  $\hat{x} \in K$  allora  $\hat{x}$  e  $\hat{x}^*$  sono allineati. ▀

Supponiamo che la varietà lineare  $M^*$  del Teorema 105 sia definita da un operatore lineare  $A^* : X^* \rightarrow Y^*$  tramite il vincolo  $A^* x^* = b^*$  dove  $b^*$  è un assegnato elemento di  $Y^*$ ,  $Y^*$  è il duale di uno spazio opportuno  $Y$  e  $A^*$  è l'operatore aggiunto di un operatore  $A : Y \rightarrow X$ . Si noti che  $\mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^*)$ . La situazione si può schematizzare con il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}(A) \subset X & \longleftrightarrow & X^* \supset \mathcal{N}(A^*) \\ A \uparrow & & \downarrow A^* \\ Y & \longleftrightarrow & Y^* \end{array} \quad (16)$$

Il sottospazio  $K$  del Teorema 105 è  $\mathcal{R}(A)$  e il sottospazio  $K^\perp$  è  $\mathcal{N}(A^*)$ . Quindi abbiamo

$$d = \min_{x^* : A^* x^* = b^*} \|x^*\| = \sup_{\substack{\|Ay\| \leq 1 \\ y \in Y}} \bar{x}^* Ay$$

In questa espressione compare l'elemento  $\bar{x}^*$  che soddisfa il vincolo  $A^* \bar{x}^* = b^*$  ma che non è normalmente assegnato. Però per definizione di operatore aggiunto abbiamo  $\bar{x}^* Ay = (A^* \bar{x}^*) y = b^* y$  e quindi

$$d = \min_{x^* : A^* x^* = b^*} \|x^*\| = \sup_{\substack{\|Ay\| \leq 1 \\ y \in Y}} b^* y \quad (17)$$

Se gli spazi  $Y$  e  $Y^*$  sono a finite dimensioni il supremo diventa un massimo e il calcolo viene facilitato considerevolmente. Si noti che  $\{y : \|Ay\| \leq 1\}$  è un insieme convesso, quindi si tratta di massimizzare una funzione lineare su un insieme convesso.

106 ESEMPIO. Si riconsideri l'Esempio 58. Come in quell'esempio si vuole portare il sistema in uno stato prefissato  $x(T)$  a partire da uno stato iniziale noto  $x(0)$  nell'intervallo di tempo  $[0, T]$ . L'obiettivo è invece diverso. Vogliamo minimizzare il massimo valore assoluto del controllo. Questo obiettivo potrebbe essere motivato dal fatto che, come spesso accade, il controllo non può superare un certa soglia in valore assoluto. Supponiamo per semplicità che vi sia una unica funzione di controllo. Vogliamo pertanto minimizzare  $\max_{t \in [0, T]} |u(t)|$ . Tale obiettivo farebbe pensare alla scelta di  $C[0, T]$  come spazio naturale in cui modellare il controllo. Tuttavia, come si vede dal Corollario 103 e dal Teorema 105, l'esistenza di un elemento a norma minima è garantita solo dal Teorema 105. Quindi dobbiamo modellare il controllo in uno spazio che sia duale di uno spazio noto. Lo spazio  $C[0, T]$  non ha un duale noto. La scelta cade quindi sullo spazio  $L_\infty[0, T]$  che è duale di  $L_1[0, T]$ . Il vincolo a cui il controllo deve sottostare è, come nell'Esempio 58,

$$x(T) - \Phi(T) x(0) = \int_0^T \Phi(T-t) B u(t) dt \quad (18)$$

Questa volta interpretiamo (18) come un vincolo definito da un operatore lineare  $G^* : L_\infty \rightarrow \mathbb{R}^n$  che trasforma la funzione  $u \in L_\infty$  nel vettore

$$\int_0^T \Phi(T-t) B u(t) dt \in \mathbb{R}^n$$

Essendo  $G$  lineare, le funzioni  $u$  che soddisfano (18) definiscono una varietà lineare  $M^* \subset L_\infty$ . L'operatore  $G^*$  è aggiunto dell'operatore  $G : \mathbb{R}^m \rightarrow L_1[0, T]$  definito da:

$$\int_0^T (Gy)(t) u(t) dt = \int_0^T y \Phi(T-t) B u(t) dt$$

quindi  $G : y \mapsto y \Phi(T-t) B$ , e

$$\mathcal{R}(G) = \left\{ f(t) \in L_1[0, T] : f(t) = \sum_{i=1}^n y_i \left( \sum_{j=1}^n \Phi_{i,j}(T-t) B_j \right) \right\}$$

Il diagramma (16) diventa in questo caso

$$\begin{array}{ccc} R(G) \subset L_1 & \longleftrightarrow & L_\infty \supset N(G^*) \\ G \uparrow & & \downarrow G^* \\ \mathbb{R}^n & \longleftrightarrow & \mathbb{R}^n \end{array}$$

e il termine di destra di (17) diventa

$$v = \max_y \left( x(T) - \Phi(T) x(0) \right) \int_0^T |y \Phi(T-t) B| dt \leq 1 \quad (19)$$

Sia  $\hat{y}$  l'ottimo di (19). Da  $\hat{y}$  si ricava  $G\hat{y} \in L_1[0, T]$  che deve essere allineato con il controllo ottimo in  $L_\infty[0, T]$ . In base alla relazione di allineamento fra  $L_1$  e  $L_\infty$  (si veda la Figura 7) il controllo ottimo deve essere costante a tratti oscillando fra  $-v$  e  $+v$  a seconda del segno di  $(G\hat{y})(t)$ .

Nell'esempio dello spostamento di una massa, dove:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ K \end{pmatrix}$$

il vincolo in (19) diventa:

$$\int_0^T |K(T-t) y_1 + K y_2| dt \leq 1 \quad (20)$$

In Figura 10 è rappresentato l'insieme ammissibile di (20) per i valori  $K = 10^{-3}$  e  $T = 5$ . La frontiera è rettilinea all'interno del cono  $\{y : y_2 \geq 0, 5y_1 + y_2 \geq 0\}$  e del suo opposto, ed ellittica altrove (in figura è anche rappresentata la retta di equazione  $5y_1 + y_2 = 0$ ).

Sostituendo i valori  $x(0) = (-10, 0)$  e  $x(T) = (0, 0)$  la funzione obiettivo di (19) è  $\max 10 y_1$ . Calcolando esplicitamente l'integrale in (20) si ottiene l'ottimo  $\hat{y}_1 = 160$ ,  $\hat{y}_2 = -400$  con valore ottimo  $v = 1600$  (si può arrivare a questo risultato anche valutando che l'ottimo si deve avere in corrispondenza di una funzione simmetrica rispetto al centro dell'intervallo temporale). Quindi  $(G\hat{y})(t) = 0.16(5-t) - 0.4 = 0.4 - 0.16t$  e si ottiene il controllo ottimo

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 1600 & 0 \leq t \leq 2.5 \\ -1600 & 2.5 < t \leq 5 \end{cases}$$

al quale corrisponde la traiettoria di stato rappresentata in Figura 11. Confrontando con l'Esempio 58 e indicando  $\bar{u}$  il controllo ottimo di quell'esempio, si può verificare che  $\max_t |\hat{u}(t)| < \max_t |\bar{u}(t)|$  e che  $\int \bar{u}^2(t) dt = 9.6 \cdot 10^6 < 12.8 \cdot 10^6 = \int \hat{u}^2(t) dt$

Applichiamo ora le stesse tecniche all'Esempio 59. In questo caso (19) diventa

$$\max_y \left( x(T) - \Phi(T) x(0) \right) \int_0^T \left| \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K(T-t) + H/\omega \sin(\omega(T-t)) \\ K + H \cos(\omega(T-t)) \\ K(T-t) - K/\omega \sin(\omega(T-t)) \\ K - K \cos(\omega(T-t)) \end{pmatrix} \right| dt \leq 1 \quad (21)$$

Per risolvere questo problema notiamo che

$$\max_{b^* y} \|Ay\| \leq 1 \quad (22)$$

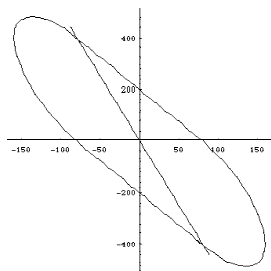


Figura 10

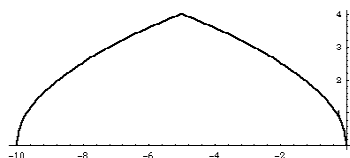


Figura 11

è equivalente a

$$\min \begin{array}{l} \|Ay\| \\ b^*y \geq C \end{array} \quad (23)$$

dove  $C$  è una costante positiva arbitraria. La soluzione di  $\bar{y}$  di (23) viene poi convertita nella soluzione  $\hat{y}$  di (22) semplicemente tramite  $\hat{y} = \alpha\bar{y}$  dove  $\alpha$  viene calcolata in modo che  $\|A(\alpha\bar{y})\| = 1$ . Se il calcolo del gradiente di  $\|Ay\|$  non presenta problemi allora conviene risolvere (23) nel seguente modo iterativo: si fissi un'arbitraria soluzione iniziale  $y = b^*$  (questo automaticamente fornisce la costante  $C > 0$ ), dopodiché si calcoli il gradiente  $g$  e si proietti il suo opposto sul sottospazio ortogonale a  $b^*$  tramite  $d = -(I - (1/b^*b^{*'})b^{*'}b^*)g$ . Si calcola poi la lunghezza del passo  $\alpha$  lungo la direzione  $d$  appena trovata in modo che  $\|A(y + \alpha d)\|$  sia minimo. Poi si pone  $y := y + \alpha d$  e così di seguito finché  $\|d\|$  è inferiore ad una tolleranza prefissata. A questo punto  $b^*$  e  $g$  sono quasi allineati e si è trovato l'ottimo di (23).

Per affrontare il problema del calcolo del gradiente di  $\|Ay\|$  nel caso in esame si consideri in generale la derivata direzionale  $DF(y, h)$  calcolata nel punto  $y$  lungo la direzione  $h$  di una funzione

$$F(y) = \int_a^b \left| \sum_i y_i f_i(t) \right| dt$$

$$DF(y, h) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\int_a^b \left| \sum_i (y_i + \alpha h_i) f_i(t) \right| dt - \int_a^b \left| \sum_i y_i f_i(t) \right| dt}{\alpha}$$

Fissato  $y$  si definiscano

$$I^+(\varepsilon) := \left\{ t \in [a, b] : \sum_i y_i f_i(t) \geq \varepsilon \right\}$$

$$I^-(\varepsilon) := \left\{ t \in [a, b] : \sum_i y_i f_i(t) \leq -\varepsilon \right\}$$

$$I^0(\varepsilon) := [a, b] \setminus (I^+(\varepsilon) \cup I^-(\varepsilon))$$

Allora si ha

$$DF(y, h) = \int_{I^+(\varepsilon)} \sum_i h_i f_i(t) dt - \int_{I^-(\varepsilon)} \sum_i h_i f_i(t) dt +$$

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\int_{I^0(\varepsilon)} \left| \sum_i (y_i + \alpha h_i) f_i(t) dt \right| - \int_{I^0(\varepsilon)} \left| \sum_i y_i f_i(t) dt \right|}{\alpha}$$

Se l'insieme di valori in cui  $\sum_i y_i f_i(t)$  si annulla ha misura zero, al tendere di  $\varepsilon$  a zero il limite tende a zero, per cui, indicando  $\sigma(y, t) := \text{sgn} \sum_i y_i f_i(t)$ , si ha

$$DF(y, h) = \int_a^b \sigma(y, t) \sum_i h_i f_i(t) dt$$

e quindi il gradiente è

$$\int_a^b \sigma(y, t) f(t) dt$$

Applicando questa procedura alla risoluzione di (21) si nota una convergenza alquanto lenta e la soluzione si trova soltanto con una certa approssimazione. Si trova

$$\hat{y} = (2.567, -16.579, 38.657, -79.187)$$

con valore ottimo  $v = 412.85$  e la soluzione  $\sum_i \hat{y}_i f_i(t)$  è rappresentata nelle Figure 12 e 13. In Figura 14 si vede il controllo ottimo  $\hat{u}$  allineato con  $(G\hat{y})(t)$ . Tuttavia a causa degli errori di approssimazione il controllo che oscilla fra  $-v$  e  $+v$  non è ammissibile. Nel calcolo dell'ottimo di (21) si può notare che mentre si raggiunge una buona stabilità per la definizione degli zeri della funzione  $Gy$  il valore ottimo non è ancora sufficientemente stabile. Pertanto la soluzione ottenuta viene 'corretta' cercando un valore massimo per il controllo che porti quanto più possibile lo stato finale nell'origine. Il valore  $v = 385$  rappresenta un buon compromesso fra i vari stati. Si vedano in Figura 15 la traiettoria delle variabili di posizione nello spazio degli stati e in Figura 16 le stesse variabili in funzione del tempo.

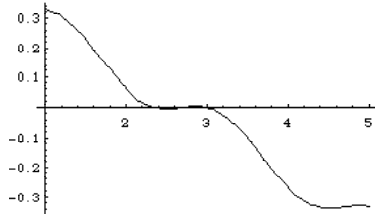


Figura 12

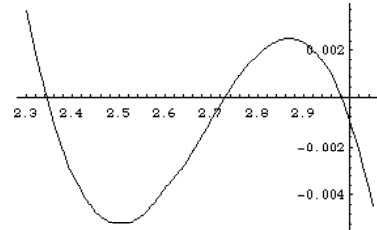


Figura 13

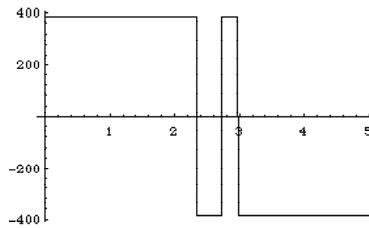


Figura 14

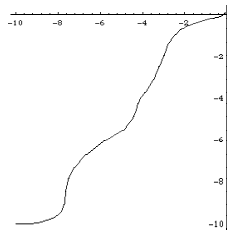


Figura 15

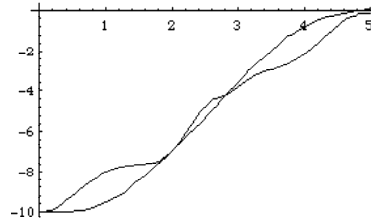


Figura 16

107 ESEMPIO. Consideriamo nuovamente l'esempio precedente cambiando il tipo di norma da minimizzare. Si supponga che si voglia minimizzare  $\int |u(t)|, dt$ , che potrebbe corrispondere a minimizzare il carburante impiegato. Il tipo di norma farebbe pensare ad un controllo in  $L_1$ , però, per garantire l'esistenza di un elemento a norma minima, dobbiamo modellare il problema in uno spazio duale e siccome  $L_1$  non è duale di qualche spazio normato, dobbiamo trovare un altro spazio. Notiamo che nello spazio  $NBV[a, b]$  la norma di un elemento  $v$  si può esprimere anche come  $\int_a^b |dv(t)| = TV(v) = \|v\|$ . Quindi possiamo associare ad ogni elemento  $v$  un controllo  $u(t) = dv(t)/dt$ , consapevoli tuttavia che il controllo sarà di tipo impulsivo se  $v$  è discontinua.

Il vincolo (18) viene qui riscritto come

$$x(T) - \Phi(T) x(0) = \int_0^T \Phi(T-t) B u(t) dt = \int_0^T \Phi(T-t) B dv(t) \quad (24)$$

L'equazione (24) definisce l'operatore lineare  $G^* : NBV[0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  che trasforma la funzione  $v \in NBV[0, T]$  nel vettore

$$\int_0^T \Phi(T-t) B dv(t) \in \mathbb{R}^n$$

Sia  $M^* \subset NBV[0, T]$  la varietà lineare definita da (24). L'operatore  $G^*$  è aggiunto dell'operatore  $G : \mathbb{R}^m \rightarrow C[0, T]$  definito da:

$$\int_0^T (Gy)(t) dv(t) = \int_0^T y \Phi(T-t) B dv(t)$$

quindi  $G : y \mapsto y \Phi(T-t) B$ , e, come nell'esempio precedente

$$\mathcal{R}(G) = \left\{ f(t) \in C[0, T] : f(t) = \sum_{i=1}^n y_i \left( \sum_{j=1}^n \Phi_{i,j}(T-t) B_j \right) \right\}$$

Il diagramma (16) diventa in questo caso

$$\begin{array}{ccc} R(G) \subset C[0, T] & \longleftrightarrow & NBV[0, T] \supset N(G^*) \\ G \uparrow & & \downarrow G^* \\ \mathbb{R}^n & \longleftrightarrow & \mathbb{R}^n \end{array}$$

e il termine di destra di (17) diventa

$$\max_y \left( y (x(T) - \Phi(T) x(0)) \right) \quad (25)$$

$$\max_{t \in [0, T]} |y \Phi(T-t) B| \leq 1$$

Sia  $\hat{y}$  l'ottimo di (25). Da  $\hat{y}$  si ricava  $G\hat{y} \in C[0, T]$  che deve essere allineato con il controllo ottimo in  $NBV[0, T]$ . In base alla relazione di allineamento fra  $C[0, T]$  e  $NBV[0, T]$  (si vedano le Figure 8 e 9)) la funzione  $\hat{v}(t)$  ottima deve essere costante a tratti e avere dei salti di discontinuità positivi in corrispondenza dei valori  $t : (G\hat{y})(t) = \max_s |(G\hat{y})(s)|$  e negativi in corrispondenza dei valori  $t : (G\hat{y})(t) = -\max_s |(G\hat{y})(s)|$ . Quindi il controllo ottimo è di tipo impulsivo.

Nell'esempio dello spostamento di una massa il vincolo in (25) diventa:

$$\max_{t \in [0, T]} |K(T-t) y_1 + K y_2| \leq 1 \quad (26)$$

In Figura 17 è rappresentato l'insieme ammissibile di (26) per i valori  $K = 10^{-3}$  e  $T = 5$ . L'ottimo è quindi  $\hat{y} = (400, -1000)$  con valore ottimo 4000, da cui  $(G\hat{y})(t) = 1 - 0.4t$ . Quindi gli istanti in cui il controllo è un impulso sono  $t = 0$  e  $t = T = 5$ . La funzione  $v(t)$  allineata con  $1 - 0.4t$  deve avere variazione totale pari a 4000. Quindi il controllo, in base a considerazioni di simmetria, deve essere un impulso positivo pari a 2000

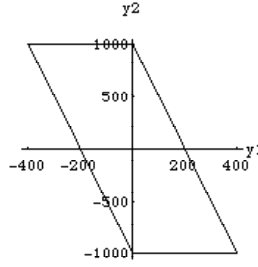


Figura 17

per  $t = 0$  ed un impulso negativo pari a  $-2000$  per  $t = T = 5$ . Usando il simbolo di Dirac per rappresentare un impulso abbiamo  $\hat{u}(t) = 2000(\delta(t) - \delta(t - 5))$  e la traiettoria di stato è data da

$$x(t) = \Phi(t) x(0) + \int_0^t \Phi(t-s) B u(s) ds = \Phi(t) x(0) + 2000 \Phi(t) B = \begin{pmatrix} -10 + 2t \\ 2 \end{pmatrix} \quad 0 < t < 5$$

Come nei casi precedenti affrontiamo ora il più difficile Esempio 59. In questo caso (19) diventa

$$\max y(x(T) - \Phi(T) x(0))$$

$$\max_{t \in [0, T]} \left| \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K(T-t) + H/\omega \sin(\omega(T-t)) \\ K + H \cos(\omega(T-t)) \\ K(T-t) - K/\omega \sin(\omega(T-t)) \\ K - K \cos(\omega(T-t)) \end{pmatrix} \right| \leq 1 \quad (27)$$

Per risolvere (27) usiamo una tecnica diversa dall'analogo caso dell'Esempio 106. Come si vede dalla Figura 17 la funzione  $\max_t |\sum_i y_i f_i(t)|$  non è differenziabile ovunque e quindi tecniche di tipo gradiente sono inapplicabili. In questo caso risulta vantaggioso un approccio che si basa sulla Programmazione Lineare con generazione di colonne. Supponiamo di dover risolvere in generale il problema:

$$\max b y$$

$$\max_{t \in [0, T]} \left| \sum_{i=1}^m y_i f_i(t) \right| \leq 1 \quad (28)$$

Siano  $t_1, \dots, t_n$  punti arbitrari di  $[0, T]$ . Il seguente problema costituisce un rilassamento di (28):

$$\max b y$$

$$\sum_{i=1}^m y_i f_i(t_j) \leq 1 \quad j = 1, \dots, n$$

$$-\sum_{i=1}^m y_i f_i(t_j) \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (29)$$

Il duale di (29) è

$$\min \sum_{j=1}^n r_j^+ + r_j^-$$

$$\sum_j f(t_j) r_j^+ - f(t_j) r_j^- = b \quad (30)$$

$$r_j^+ \geq 0, \quad r_j^- \geq 0$$

Il problema (30) può essere risolto con la Programmazione Lineare. In ottimalità i costi ridotti devono essere non negativi, ovvero i vincoli di (29) devono essere ammissibili, dove  $y$  è la variabile duale ottima



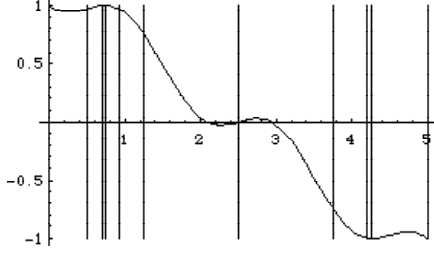


Figura 18

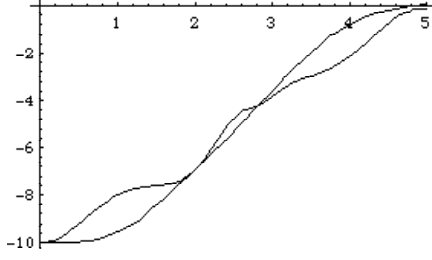


Figura 20

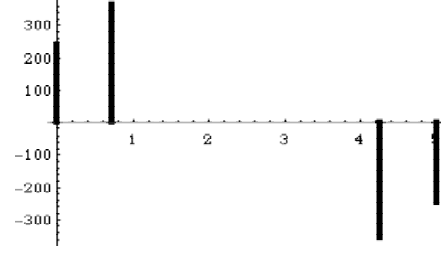


Figura 19

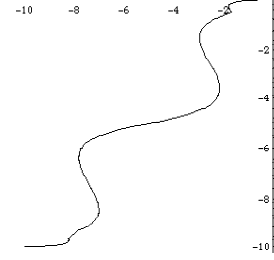


Figura 21

generata dal problema (30). Ottenuta la soluzione ottima possiamo raffinare il rilassamento aggiungendo altri punti dell'intervallo  $[0, T]$ . In particolare possiamo aggiungere quei punti dove  $|y f(t)|$  è massima. Questo corrisponde a generare una colonna nel modello (30). Se  $\max_t |y f(t)| \leq 1$  la soluzione di (29) è anche soluzione di (28). Quindi è utile generare una colonna se  $\max_t |y f(t)| > 1$ . In pratica si può notare che basta generare un numero limitato di colonne per ottenere una soluzione con una buona approssimazione. Si veda in Figura 18 la funzione finale  $y f(t)$  che si ottiene. In figura sono anche indicati tutti i punti che sono serviti da campionamento. Si noti che i valori di  $t_j$  che sono in base corrispondono a punti dove  $|y f(t)| = 1$  (in quanto i costi ridotti di variabili in base sono nulli) e quindi, in ottimalità, se  $t_j$  è in base  $|y f(t_j)| = 1 = \|y f(t)\|$ . Quindi, come primo fatto, il controllo deve essere impulsivo e gli impulsi devono avvenire per i  $t_j$  in base. Inoltre, siccome le funzioni  $f(t)$  sono, in questo esempio, del tipo  $\Phi(T-t)B$  si vede che la soluzione ottima  $\hat{r}_j^+$ , con  $j \in \beta^+$  e  $\hat{r}_j^-$ , con  $j \in \beta^-$  (dove gli indici di base sono ripartiti in  $\beta^+$  per le variabili  $r_j^+$  e  $\beta^-$  per le variabili  $r_j^-$ ) soddisfa

$$\sum_{j \in \beta^+} \Phi(T-t_j) B r_j^+ - \sum_{j \in \beta^-} \Phi(T-t_j) B r_j^- = b$$

Si noti ora che se il controllo è del tipo

$$u(t) = \sum_{j \in \beta^+} \delta(t-t_j) r_j^+ - \sum_{j \in \beta^-} \delta(t-t_j) r_j^-$$

si ha

$$\begin{aligned} x(T) - \Phi(T) x(0) &= \int_0^T \Phi(T-t) B u(t) dt = \int_0^T \Phi(T-t) B \sum_{j \in \beta^+} \delta(t-t_j) r_j^+ - \sum_{j \in \beta^-} \delta(t-t_j) r_j^- = \\ &= \sum_{j \in \beta^+} \int_0^T \Phi(T-t) B \delta(t-t_j) r_j^+ dt - \sum_{j \in \beta^-} \int_0^T \Phi(T-t) B \delta(t-t_j) r_j^- dt = \\ &= \sum_{j \in \beta^+} \Phi(T-t_j) B r_j^+ - \sum_{j \in \beta^-} \Phi(T-t_j) B r_j^- \end{aligned}$$

e quindi la soluzione ottima di (30) fornisce automaticamente anche i valori degli impulsi. Il controllo ottimo dell'esempio è rappresentato in Figura 19. In Figura 20 è rappresentata l'evoluzione nel tempo delle due variabili di posizione e in Figura 21 la traiettoria delle medesime nello spazio degli stati. ■