1) Si rifaccia l'esempio 107 della dispensa 'Ottimizzazione a infinite dimensioni' (spostamento di una massa con norma sul controllo $\int |u(t)|$) aggiungendo la forza d'attrito. La forza d'attrito è proporzionale alla velocità e di segno opposto. Si assuma un coefficiente di proporzionalità pari a 1000 newton sec/m. Si ricavi la matrice $\Phi(t)$ in modo simbolico. I rimanenti calcoli possono essere svolti in modo numerico. Si determini il controllo di norma minima.

**Soluzione**

Indicando con $K$ il rapporto fra il coefficiente d'attrito e la massa si ha ($K = 1$ con i dati del problema)

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & (1 - e^{-Kt})/K \\ 0 & e^{-Kt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

per cui il problema da risolvere è

$$\begin{array}{ll} \max & 10\, y_1 \\ & \max\limits_{t \in 0,5]} |(1 - e^{t-T})\, y_1 + e^{t-T}\, y_2| \leq 10^3 \end{array}$$

Le funzione $(1 - e^{t-T})\, y_1 + e^{t-T}\, y_2 = e^{t-T}(y_2 - y_1) + y_1$ è monotona (crescente o decrescente a seconda del segno di $y_2 - y_1$) e quindi il massimo si ha soltanto agli estremi dell'intervallo. Quindi il problema è

$$\begin{array}{lrrl} \max & & 10\, y_1 & \\ & (1 - e^{-5})\, y_1 & + e^{-5}\, y_2 & \leq 10^3 \\ & -(1 - e^{-5})\, y_1 & - e^{-5}\, y_2 & \leq 10^3 \\ & & y_2 & \leq 10^3 \\ & & -\, y_2 & \leq 10^3 \end{array}$$

L'ottimo si trova per $y_2 = -10^3$ e $y_1 = 10^3(1 + e^{-5})/(1 - e^{-5}) = 1013.57$. Per calcolare gli impulsi ottimi si sfrutta la complementarità. Quindi gli impulsi si ottengono da

$$10^{-3} \begin{pmatrix} 1 - e^{-5} & 0 \\ e^{-5} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^+ \\ r_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui $r_1^+ = 10^4\, e^5/(e^5 - 1) = 10067.8$, $r_2^- = 10^4/(e^5 - 1) = 67.8$.

2) Come nell'esempio precedente però cambiando la norma, cioè $||u|| = \int u^2(t)$. Si faccia vedere che, in generale, il problema a finite dimensioni è la minimizzazione di una funzione lineare su un ellissoide (cioè esiste una matrice $Q$ positiva definita e l'insieme ammissibile è dato da $y^T Q y \le 1$). Si indichi come si calcola in generale $Q$. Si colleghi questo risultato con l'esempio 58 della dispensa 'Ottimizzazione a infinite dimensioni'.

**Soluzione**

L'operatore $A$ è come negli altri casi $y \mapsto B^T\,\Phi(T-t)^T y$. Allora $||Ay|| \le 1$ in $L_2$ si esprime come

$$\int_0^T y^T\,\Phi(T-t)\,B\,B^T\,\Phi(T-t)^T\,y\,dt \le 1$$

e quindi si ha $y^T Q y \le 1$ con

$$Q = \int_0^T \Phi(T-t)\,B\,B^T\,\Phi(T-t)^T\,dt$$

che è positiva definita se il sistema è controllabile. Come si vede $Q$ è la matrice $\Gamma$ dell'esempio 58. Siccome l'allineamento in $L_2$ corrisponde alla stessa funzione a meno di uno scalare positivo il controllo ottimo è dato da $(b^T\hat{y})\,A\hat{y}$ con $\hat{y}$ valore ottimo di $\max b^T y,\ y^T Q y \le 1$. Il Lagrangiano di questo problema è $L(y,u) = -b^T y + u(y^T Q y - 1)$. Derivando rispetto a $y$ ed eguagliando a zero si ottiene $-b + 2uQy = 0$, quindi $y = 1/(2u) Q^{-1} b$. Imponendo $y^T Q y = 1$ si ricava $u$. Quindi

$$\frac{1}{4\,u^2}\,b^T Q^{-1} b = 1 \Longrightarrow 2\,u = \sqrt{b^T Q^{-1} b} \Longrightarrow \hat{y} = \frac{Q^{-1} b}{\sqrt{b^T Q^{-1} b}}$$

Il valore ottimo è quindi $\hat{v} = b^T\hat{y} = \sqrt{b^T Q^{-1} b}$. Allora il controllo è $\hat{v} A\hat{y}$. Siccome $\hat{v}\hat{y} = Q^{-1} b$ si ottiene lo stesso risultato dell'esempio 58.

Con i dati del problema si ottiene (numericamente)

$$Q = \begin{pmatrix} 3.51345\,10^{-6} & 4.93285\,10^{-7} \\ 4.93285\,10^{-7} & 4.99977\,10^{-7} \end{pmatrix} \qquad \hat{y} = 10^6(3.30385, -3.25963)$$

e controllo ottimo $u(t) = 3303.85 - 44.2244\,e^t$.

3) Si consideri il problema di lanciare un razzo verticalmente fino a farlo raggiungere una prefissata altezza $H$. Sul razzo agiscono soltanto la forza di gravità e la forza $u(t)$ del propulsore. Si trovi il controllo $u(t)$ ottimo rispetto all'obiettivo di minimizzare il consumo di propellente, cioè $\int |u(t)| dt$. Si noti che l'istante finale non è fissato, per cui conviene prima risolvere per un generico istante finale $T$ e poi minimizzare rispetto a $T$.

**Soluzione**

Il sistema è descritto da

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}/m \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ -g/m \end{pmatrix}$$

e quindi

$$x(T) = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(0) + \int_0^T \begin{pmatrix} 1 & T-t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}/m \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -g/m \end{pmatrix} \right) dt$$

Siccome $x(0) = (0, 0)$ e $x(T) = (H, 0)$ si ha

$$\begin{pmatrix} H \\ 0 \end{pmatrix} - \int_0^T \begin{pmatrix} 1 & T-t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -g/m \end{pmatrix} dt = \int_0^T \begin{pmatrix} 1 & T-t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{1}/m \end{pmatrix} u(t) dt$$

cioè

$$\begin{pmatrix} H + g\,T^2/2 \\ g\,T \end{pmatrix} = \int_0^T \begin{pmatrix} (T-t)/m\, u(t) \\ u(t)/m \end{pmatrix} dt$$

Il vincolo del problema riguarda l'altezza da raggiungere non la velocità con cui il razzo raggiunge l'altezza $H$. Quindi si ha soltanto

$$H + \frac{g\,T^2}{2} = \int_0^T \frac{T-t}{m}\, u(t)\, dt$$

e il problema associato da risolvere è

$$\max \quad \left( H + \frac{g\,T^2}{2} \right) y$$
$$\max_{t \in [0,T]} |y\, \frac{T-t}{m}| \leq 1$$

la cui soluzione è $\hat{y} = m/T$. Quindi il valore ottimo è

$$\left( H + \frac{g\,T^2}{2} \right) \frac{m}{T}$$

e tale è anche il valore dell'unico impulso in $t = 0$ (a causa dell'allineamento). Derivando rispetto a $T$ ed eguagliando a zero si ottiene $T = \sqrt{2\,H/g}$. Si noti che questo è esattamente il tempo necessario per raggiungere il suolo in caduta libera da un'altezza $H$. Quindi l'impulso ottimo è tale da far raggiungere $H$ con velocità zero e vale $m\,\sqrt{2\,H\,g}$ (fisicamente la dimensione è una quantità di moto).