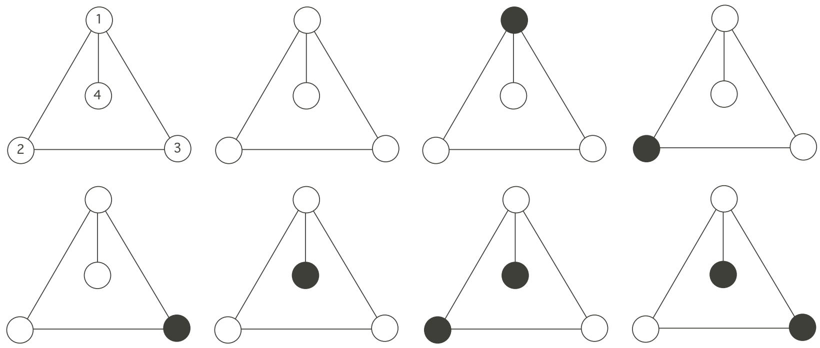


1) Si consideri il grafo indicato in figura insieme a tutti i suoi 7 insiemi indipendenti. Ogni insieme indipendente può esser rappresentato da un vettore d'incidenza 0-1 in R^4. Quindi si hanno i seguenti sette vettori

$$e^0 = \{0,0,0,0\}\,, \qquad e^1 = \{1,0,0,0\}\,, \qquad e^2 = \{0,1,0,0\}\,, \qquad e^3 = \{0,0,1,0\}\,,$$
$$e^4 = \{0,0,0,1\}\,, \qquad e^5 = \{0,1,0,1\}\,, \qquad e^6 = \{0,0,1,1\}\,.$$

Si consideri il poliedro $P := \text{conv}_i \left\{e^i\right\}$. Si descriva P tramite le diseguaglianze che definiscono le sue faccette. Si operi nel seguente modo:

— Dato un punto $x^0 \in \mathring{P}$ si consideri il poliedro $Q = P - x^0$ (quindi $0 \in \mathring{Q}$);

— Si calcolino i vertici del polare Q^*;

— I vertici di Q^* identificano le faccette di Q; da queste si deducano le faccette di P.

Si interpretino le diseguaglianze ottenute in base alla struttura del grafo.

Per facilitare il calcolo dei vertici di Q^*, nel caso i sistemi vengano risolti manualmente, si tenga conto delle seguenti osservazioni: Sia $A\,x = \mathbf{1}$ un sistema 'facile' da risolvere e sia $B := A - \mathbf{1}\,{x^0}^T$. Per risolvere $B\,x = \mathbf{1}$ si risolva prima $A\,x = \mathbf{1}$ e sia $\bar{x}$ la soluzione. Allora se $B\,\hat{x} = \mathbf{1}$ si ha

$$B\,\bar{x} = A\,\bar{x} - \mathbf{1}\,{x^0}^T\,\bar{x} = \mathbf{1} - ({x^0}^T\,\bar{x})\,\mathbf{1} = (1 - ({x^0}^T\,\bar{x}))\,\mathbf{1} = (1 - ({x^0}^T\,\bar{x}))\,B\,\hat{x}$$

e quindi

$$\hat{x} = \frac{1}{(1 - ({x^0}^T\,\bar{x}))}\,\bar{x}$$

Inoltre sono pochi i sistemi da risolvere se si sfrutta la degenerazione.

Soluzione:

Il punto $x^0 := \{1,1,1,1\}/5$ certamente appartiene all'interno di P. Quindi Q è l'inviluppo convesso di $a^i := e^i - x^0$ ovvero:

$$a^0 = \{-1,-1,-1,-1\}/5, \qquad a^1 = \{4,-1,-1,-1\}/5, \qquad a^2 = \{-1,4,-1,-1\}/5,$$
$$a^3 = \{-1,-1,4,-1\}/5, \qquad a^4 = \{-1,-1,-1,4\}/5, \qquad a^5 = \{-1,4,-1,4\}/5,$$
$$a^6 = \{-1,-1,4,4\}/5.$$

Q^* è definito da $Q^* = \{w \in R^4 : w\, a^i \leq 1,\ \forall i\}$. Per calcolare i vertici di Q^* si possono mettere a sistema 4 disequazioni e risolvere il sistema lineare. Se la soluzione è ammissibile per gli altri tre vincoli, la soluzione è un vertice.

Si indichi con β l'insieme dei quattro indici dai quali si calcola il sistema lineare. Si ponga $\beta := \{1, 2, 3, 4\}$. Si ottiene come soluzione $\bar{V} = \{0, 0, 0, -5\}$. Inoltre $a^i\, \bar{V} < 1$, $i \notin \beta$. Quindi $\bar{V}$ è un vertice.

Si ponga quindi $\beta := \{1, 2, 3, 5\}$. Si ottiene $\bar{V} = \{0, 0, -5, 0\}$ e $a^4\, \bar{V} < 1$, $a^6\, \bar{V} = 1$, $a^7\, \bar{V} < 1$. Quindi ogni β che non contenga né 4 né 7 darà la medesima soluzione.

Possiamo pertanto considerare direttamente $\{1, 2, 3, 7\}$ che dà luogo ad una matrice singolare.

Poniamo $\beta := \{1, 2, 4, 5\}$. Si ottiene $\bar{V} = \{0, -5, 0, 0\}$ e $a^3\, \bar{V} < 1$, $a^6\, \bar{V} < 1$, $a^7\, \bar{V} = 1$. Quindi ogni β che non contenga né 3 né 6 darà la medesima soluzione.

Poniamo allora $\beta := \{1, 3, 4, 5\}$. Si ottiene $\bar{V} = \{-5, 0, 0, 0\}$ e $a^2\, \bar{V} < 1$, $a^6\, \bar{V} = 1$, $a^7\, \bar{V} = 1$. Quindi ogni β che non contenga 2 darà la medesima soluzione.

Poniamo allora $\beta := \{2, 3, 4, 6\}$. Si ottiene $\bar{V} = \{5/2, 5/2, 5/2, 0\}$ e $a^1\, \bar{V} < 1$, $a^5\, \bar{V} < 1$, $a^7\, \bar{V} = 1$. Quindi ogni β che non contenga né 1 né 5 darà la medesima soluzione.

Rimane ancora $\beta := \{2, 5, 6, 7\}$. Si ottiene $\bar{V} = \{5/3, 0, 0, 5/3\}$ e $a^1\, \bar{V} < 1$, $a^3\, \bar{V} < 1$, $a^4\, \bar{V} < 1$.

I vertici sono dunque i seguenti:

$$V^1 = \{-5, 0, 0, 0\}\,, \quad V^2 = \{0, -5, 0, 0\} \quad V^3 = \{0, 0, -5, 0\}\,, \quad V^4 = \{0, 0, 0, -5\}$$

$$V^5 = \left\{\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0\right\}, \quad V^6 = \left\{\frac{5}{3}, 0, 0, \frac{5}{3}\right\}$$

Quindi $Q = \{y : V^i\, y \leq 1,\ \forall i\}$. Siccome $y = x - x^0$ si ha $P = \{x : V^i\,(x - x^0) \leq 1,\ \forall i\}$ cioè $P = \{x : V^i\, x \leq 1 + V^i\, x^0,\ \forall i\}$. Calcolando si ottiene:

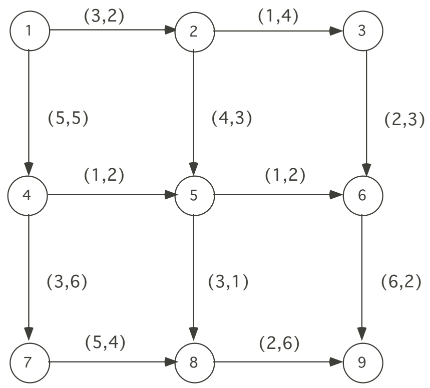
$$1 + V^1\, x^0 = 0, \quad 1 + V^2\, x^0 = 0, \quad 1 + V^3\, x^0 = 0, \quad 1 + V^4\, x^0 = 0, \quad 1 + V^5\, x^0 = \frac{5}{2}, \quad 1 + V^6\, x^0 = \frac{5}{3}$$

e quindi le diseguaglianze che definiscono P sono

$$\begin{aligned}
x_1 \qquad\qquad\qquad &\geq 0\\
x_2 \qquad\qquad &\geq 0\\
x_3 \qquad &\geq 0\\
x_4 &\geq 0\\
x_1 + x_2 + x_3 \qquad &\leq 1\\
x_1 \qquad\qquad + x_4 &\leq 1
\end{aligned}$$

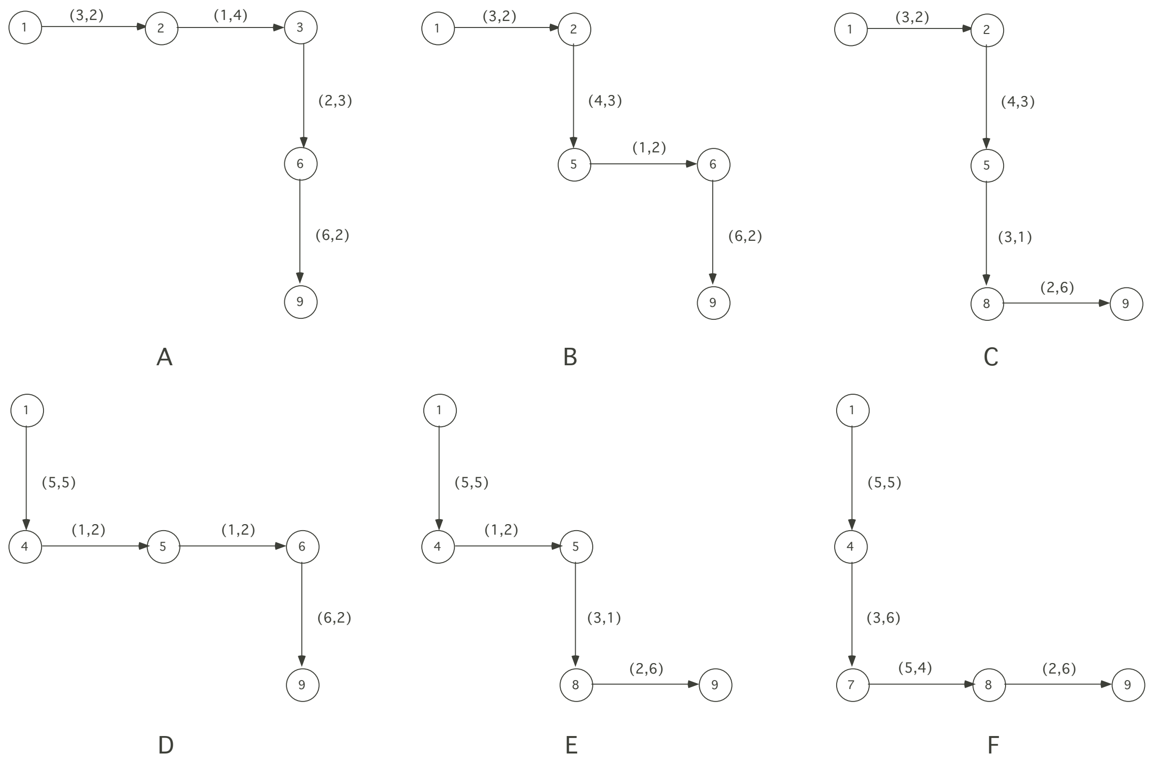
Oltre ai vincoli di non negatività, si ha un vincolo dovuto alla clique $\{1, 2, 3\}$ e all'arco $\{1, 4\}$ (due clique massimali quindi).

2) Sia data la seguente rete dove ad ogni arco sono associati due tipi di costi. Si trovino i cammini minimi non dominati dal nodo 1 al nodo 9.



Soluzione

In questo esempio vi sono solo 6 possibili cammini come indicato in figura



i cui valori sono $v(A) = (12, 11)$, $v(B) = (14, 9)$, $v(C) = (12, 12)$, $v(D) = (13, 11)$, $v(E) = (11, 14)$, $v(F) = (15, 21)$. Come si vede C è dominato da A, D da A ed F da tutti gli altri. Quindi i cammini non dominati sono A, B ed E.

3) Si consideri un problema di cammino minimo da un nodo s ad un nodo t in cui il costo dell'arco (i, j) si esprime come $c_{ij} = a_i + b_j$.

a) si dimostri che tale problema è equivalente ad un problema in cui il costo dell'arco (i, j) si esprime come $c_{ij} = c_j$;

b) si dimostri che la complessità computazionale dell'algoritmo di Dijkstra si riduce a $O(m + n \log n)$ per quest'ultimo problema.

Soluzione

– Un generico cammino $P : s \to i \to j \to h \to k \to t$ ha costo $a_s + b_i + a_i + b_j + a_j + b_h + a_h + b_k + a_k + b_t$. Il costo a_s è presente in ogni cammino e può essere posto uguale a zero senza perdita di generalità. Siccome da ogni nodo intermedio bisogna anche uscire si può 'caricare' il costo a_j sull'arco di arrivo in j anziché su quello di uscita e quindi si può porre $c_{ij} := b_j + a_j$ per tutti gli archi (i, j) con $j \neq t$ mentre $c_{it} := b_t$ (dato che non c'è uscita da t). Si noti che mentre il costo di un cammino $s \to t$ e' invariato con i due tipi di costi (a parte la traslazione uniforme di a_s) non sono invariati i costi dei cammini sui nodi intermedi. Quindi calcolando il cammino minimo con i nuovi costi otteniamo il cammino minimo $s \to t$ con ambedue i tipo di costi ma non otteniamo anche i cammini minimi $s \to i$ con i costi originari.

– Nell'algoritmo di Dijkstra i valori ρ_j valgono inizialmente $+\infty$ (tranne $\rho_s = 0$). Tali valori diventano finiti non appena il nodo j è adiacente al primo dei nodi k generati dall'algoritmo. Dopodiché, con costi generici i valori possono essere aggiornati ulteriormente. Se però i costi sono del tipo $c_{ij} = c_j$, tale valore è quello definitivo. Infatti se si ha $\rho_j = \rho_k + c_j$ nell'iterazione in cui ρ_j diventa finito, successivamente si avrà sempre $\rho_{k'} \geq \rho_k$ per ogni nodo k' che si aggiunge all'insieme S e quindi ρ_j non può essere migliorato. Allora non servono i confronti e l'algoritmo può semplicemente caricare in uno 'heap' i valori ρ_j dei nodi adiacenti a k e non adiacenti a nodi di S. Tutto il lavoro consiste nel togliere dallo heap il valore minimo e nell'aggiornare lo heap dopo questa opera di rimozione e dopo le inserzioni dei nodi j. Quindi si ha un lavoro pari a $O(n \log n)$. Il lavoro di cercare i nodi adiacenti a k corrisponde ad una ricerca su grafi ed ha quindi costo $O(m)$. Le due operazioni sono indipendenti fra loro e quindi si ha complessivamente $O(m + n \log n)$.

4) Si consideri il problema di determinare il circuito di minimo costo medio in un grafo orientato. Non si risolva il problema tramite la programmazione dinamica ma piuttosto ricorrendo un certo numero di volte ad una routine che sia in grado di verificare l'esistenza di circuiti negativi (ad es. Floyd-Warshall). Si risolva con criteri analoghi il problema del circuito di massimo costo medio.

Si calcoli (usando il calcolatore possibilmente) i circuiti medi minimi e massimi per il seguente grafo orientato

$c_{1,4}=76$;	$c_{1,5}=2$;	$c_{1,6}=74$;	$c_{1,7}=69$;	$c_{1,8}=48$;
$c_{2,4}=11$;	$c_{2,5}=25$;	$c_{2,7}=24$;	$c_{2,9}=67$;	$c_{3,1}=82$;
$c_{3,4}=28$;	$c_{3,5}=30$;	$c_{3,6}=14$;	$c_{3,7}=97$;	$c_{3,9}=92$;
$c_{3,10}=62$;	$c_{4,1}=6$;	$c_{4,6}=24$;	$c_{4,9}=95$;	$c_{4,10}=26$;
$c_{5,6}=75$;	$c_{5,10}=50$;	$c_{6,1}=87$;	$c_{6,2}=33$;	$c_{6,4}=79$;
$c_{6,5}=69$;	$c_{6,7}=82$;	$c_{6,9}=6$;	$c_{7,1}=66$;	$c_{7,4}=26$;
$c_{7,5}=4$;	$c_{7,6}=90$;	$c_{8,1}=93$;	$c_{8,2}=77$;	$c_{8,3}=15$;
$c_{8,4}=84$;	$c_{8,9}=38$;	$c_{9,1}=67$;	$c_{9,2}=97$;	$c_{9,3}=71$;
$c_{9,5}=11$;	$c_{9,10}=97$;	$c_{10,6}=82$;	$c_{10,8}=85$;	$c_{10,9}=63$;

Soluzione

Sia $L(C)$ la lunghezza del circuito C. Si vuole quindi valutare:

$$\hat{K} := \max K : K \leq \frac{L(C)}{|C|} \quad \forall C$$

Se $K \leq \hat{K}$ si ha $K\,|C| \leq L(C)$, $\forall C$, cioè $L(C) - K\,|C| \geq 0$, $\forall C$. Si noti che $L(C) - K\,|C|$ è anche la lunghezza del circuito C quando il costo di ogni arco sia stato diminuito di K. Allora, fissato un valore K_0 è immediato determinare se $K_0 \leq \hat{K}$ oppure $K_0 > \hat{K}$. Basta eseguire la routine di Floyd-Warshall con costi $c_{ij} - K_0$ e verificare se ci sono circuiti negativi o meno.

Se non ci sono allora $K_0 \leq \hat{K}$ e si può scegliere un valore superiore a K_0. Sia C_0 il circuito ottimo ottenuto in questo caso (corrispondente al minimo dei valori diagonali della matrice finale di F-W). Allora $L(C_0)/|C_0|$ è una limitazione superiore al valore ottimo. Se non esistono circuiti negativi con $c_{ij} - L(C_0)/|C_0|$ allora C_0 è ottimo con valore $L(C_0)/|C_0|$. Altrimenti esistono circuiti negativi e bisogna scegliere un valore K_1 tale che $K_0 < K_1 < L(C_0)/|C_0|$, Se invece ci sono circuiti negativi bisogna scegliere un valore inferiore a K_0.

Questo tipo di ricerca può essere effettuata efficientemente tramite ricerca binaria a partire dalla limitazione inferiore $K_0 := 0$ e dalla limitazione superiore $L(C_0)/|C_0|$. Ogni qualvolta si ottiene un circuito minimo di costo non negativo C_1 si può verificare se con $K = L(C_1)/|C_1|$ si ottengono circuiti minimi di costo zero (quanto meno C_1) e in quel caso C_1 è ottimo.

Nel caso si voglia cercare il circuito di costo medio massimo si deve cercare

$$\hat{K} := \min K : K \geq \frac{L(C)}{|C|} \quad \forall C$$

Ovvero $\min K$ per cui, con costi $c_{ij} - K$, tutti i circuiti hanno lunghezza negativa. Tuttavia la routine di Floyd-Warshall è in grado di verificare che tutti i circuiti siano positivi e non che siano tutti negativi. Bisogna allora invertire i segni dei costi. Sia $\tilde{L}(C)$ la lunghezza del circuito C con i costi invertiti. Ovviamente $L(C) = -\tilde{L}(C)$. Cerchiamo allora

$$\hat{K} := \min K : K \geq \frac{-\tilde{L}(C)}{|C|} \quad \forall C$$

cioè

$$\hat{K} := \min K : -K \leq \frac{\tilde{L}(C)}{|C|} \quad \forall C$$

o anche si cerca il minimo valore di K per cui, con costi $-c_{ij} + K$, tutti i circuiti hanno lunghezza non negativa. Anche in questo caso si può operare con ricerca binaria fra il valore 0 (che darà certamente circuiti negativi se i valori iniziali di costo sono non negativi) e $\max c_{ij}$ (costi non negativi e quindi circuiti non negativi).

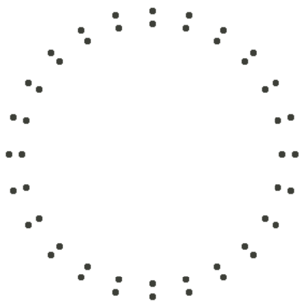
Per risolvere l'istanza (caso di circuito medio minimo) si consideri $K = 0$. Applicando F-W si ottiene come circuito minimo $2 \to 4 \to 6 \to 2$ di lunghezza 68. Pertanto il valore 68/3 è una limitazione superiore e possiamo considerare $K = 68/3$. Con questo valore si ottiene un circuito negativo. Quindi proviamo $K = 16$. Si ottiene ancora il circuito $2 \to 4 \to 6 \to 2$ e quindi si può aumentare K a 20. Si ottengono circuiti positivi con minimo circuito $1 \to 8 \to 3 \to 6 \to 2 \to 4 \to 1$ che ha lunghezza (reale) 127. Proviamo allora il valore $K = 127/6$ che dà luogo ad un circuito minimo nullo (scalato di K). Pertanto tale circuito è il minimo circuito medio.

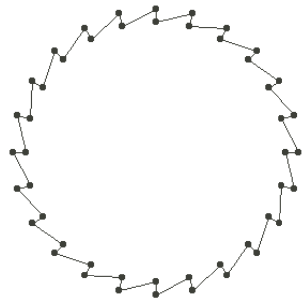
Per trovare il massimo si invertano tutti i costi e si calcoli il cammino minimo con costi $-c_{ij} + K$. Si ottiene il cammino $6 \to 7 \to 6$ con costo 28. Proviamo quindi $K = 100 - 28/2$ e si ottiene un circuito negativo. Proviamo allora $K = 100 - 28/2 + 8$ e si ottiene il circuito $4 \to 9 \to 10 \to 8 \to 4$ di costo 15. Proviamo allora a togliere 15/4 dal valore precedente di K. Si ottiene un circuito nullo e pertanto tale circuito è di valore medio massimo pari a 94-15/4.

5) Si dimostri che l'approssimazione 1 è stretta per l'algoritmo che calcola una soluzione di TSP euclideo calcolando dapprima un minimo albero di supporto, poi raddoppiando gli archi e calcolando un circuito euleriano e infine ricavando da questo un circuito hamiltoniano. In particolare si consiglia di costruire una famiglia parametrica di istanze tali che il limite del rapporto fra l'istanza calcolata dall'algoritmo approssimato e l'ottimo (oppure una soluzione ammissibile) tenda a 2.

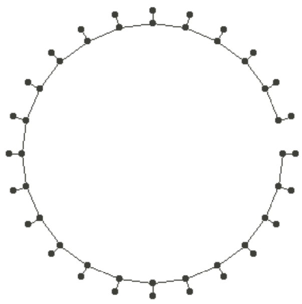
Soluzione

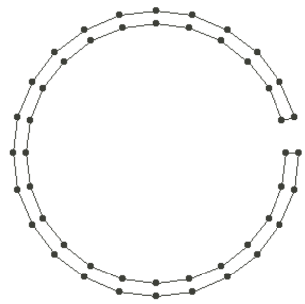
Si consideri una famiglia di grafi i cui vertici siano disposti come in figura con il tour ottimo indicato:





La famiglia può essere parametrizzata tramite il numero di nodi $2n$ disposti regolarmente e appaiati su due circonferenze concentriche. Il raggio della circonferenza interna sia 1 e quello della circonferenza esterna sia $1 + 1/n^2$. L'albero di supporto è quello indicato in figura e può dar luogo al circuito euleriano che percorre dapprima tutta la circonferenza interna e poi la ripercore all'indietro aggiungendo i segmenti fra le due circonferenze. Il circuito hamiltoniano derivato è quello indicato in figura:





Al tendere di n ad ∞ la lunghezza del tour ottimo tende a 2π mentre quella della soluzione approssimata tende a 4π.