Multiflusso a costo minimo con generazione di colonne

Sia data una rete $G = (N, E)$ con capacità c_e e costi d_e per ogni arco $e \in E$. Siano date m coppie di sorgenti destinazioni (s^k, t^k). Per ogni coppia sia dato il flusso b^k che deve essere inviato da s^k a t^k. Il problema è quello di trovare un multiflusso ammissibile f^k, cioè

$$\sum_k |f_e^k| \le c_e, \quad \forall e, \qquad \sum_{e\in\delta^+(i)} f_e^k = \sum_{e\in\delta^-(i)} f_e^k \qquad i \neq s^k,\ i \neq t^k$$

$$\sum_{e\in\delta^+(s^k)} f_e^k - \sum_{e\in\delta^-(s^k)} f_e^k = \sum_{e\in\delta^-(t^k)} f_e^k - \sum_{e\in\delta^+(t^k)} f_e^k = b^k$$

e che minimizzi la funzione obiettivo

$$\sum_k \sum_e d_e\, |f_e^k|$$

Approccio con generazione di colonne: sia P^k l'insieme dei cammini da s^k a t^k (gli archi su un cammino non sono necessariamente orientati tutti nello stesso verso) e sia $x_p \ge 0$ un valore di flusso costante lungo il cammino p. Sia $d_p := \sum_{e\in p} d_e$ Allora il problema si può impostare come

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_k \sum_{p\in P^k} d_p\, x_p \\ & \sum_k \sum_{p\in P^k} [e\in p]\, x_p \le c_e \qquad \forall e \in E \\ & \sum_{p\in P^k} x_p = b^k \qquad \forall k \\ & x_p \ge 0 \end{aligned} \tag{1}$$

dove $[A] = 0$ se A è falso e $[A] = 1$ se A è vero. Riscriviamo (1) come

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_k \sum_{p\in P^k} d_p\, x_p \\ & -\sum_k \sum_{p\in P^k} [e\in p]\, x_p \ \ge -c_e \qquad \forall e \in E \\ & \sum_k \sum_{p\in P^k} [k=h]\, x_p = b^h \qquad \forall h \\ & x_p \ge 0 \end{aligned}$$

Il duale è

$$\begin{aligned} \max \quad & -\sum_e c_e\, y_e + \sum_h b^h\, w_h \\ & -\sum_e [e\in p]\, y_e + \sum_h [k=h]\, w_h \le d_p \qquad \forall p \in P^k,\ \forall k \\ & y_e \ge 0 \end{aligned} \tag{2}$$

che possiamo riscrivere come

$$\begin{aligned} \max \quad & -\sum_e c_e\, y_e + \sum_h b^h\, w_h \\ & -\sum_{e\in p} y_e + w_k \le d_p \qquad \forall p \in P^k,\ \forall k \\ & y_e \ge 0 \end{aligned}$$

Il vincolo duale è ammissibile se

$$d_p + \sum_{e \in p} y_e = \sum_{e \in p} (d_e + y_e) \geq w_k$$

Si indichi con $L(p, y) = \sum_{e \in p}(d_e + y_e)$ la lunghezza del cammino p quando la lunghezza di ogni arco sia definita come somma del costo d_e e del valore duale y_e. Allora il vincolo duale è ammissibile se e solo se

$$\min_{p \in P^k} L(p, y) \geq w_k \quad \forall k$$

Si tratta quindi di risolvere m problemi di cammino minimo. Per inizializzare il problema conviene risolvere il seguente problema (cosiddetto *problema artificiale*) fino ad ottenere una soluzione ammissibile (quando $z_k = 0$ per ogni k)

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_k z_k \\ & \sum_k \sum_{p \in P^k} [e \in p]\, x_p \leq c_e \qquad \forall e \in E \\ & \qquad \sum_{p \in P^k} x_p + z_k = b^k \qquad \forall k \\ & x_p \geq 0, \quad z_k \geq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{array}{llll} \min & & \sum_k z_k & \\ & -\sum_k \sum_{p \in P^k} [e \in p]\, x_p & \geq -c_e & \forall e \in E \\ & \sum_k \sum_{p \in P^k} [k = h]\, x_p + \sum_k [k = h]\, z_k = b^h & & \forall h \\ & x_p \geq 0, \quad z_k \geq 0 & & \end{array}$$

con duale

$$\begin{aligned} \max \quad & -\sum_e c_e\, y_e + \sum_h b^h\, w_h \\ & -\sum_e [e \in p]\, y_e + \sum_h [k = h]\, w_h \leq 0 \qquad \forall p \in P^k, \forall k \\ & \qquad \sum_h [k = h]\, w_h \leq 1 \qquad \forall k \\ & y_e \geq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

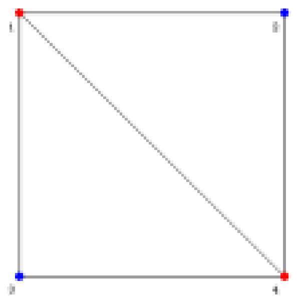
cioè

$$\begin{aligned} \max \quad & -\sum_e c_e\, y_e + \sum_h b^h\, w_h \\ & -\sum_e [e \in p]\, y_e + \sum_h [k = h]\, w_h \leq 0 \qquad \forall p \in P^k, \forall k \\ & \qquad \sum_h [k = h]\, w_h \leq 1 \qquad \forall k \\ & y_e \geq 0 \end{aligned}$$

Il vincolo duale è

$$\sum_{e \in p} y_e \geq w_k, \qquad w_k \leq 1$$

Sia ad esempio dato il seguente grafo



con le due coppie di sorgenti-destinazione $(1,4)$ e $(2,3)$ e rispettivi valori di b pari a 15 e 10. I costi e le capacità degli archi siano:

$(1,2)$	25	20
$(1,3)$	10	10
$(1,4)$	5	5
$(2,4)$	30	12
$(3,4)$	10	8

Iniziamo risolvendo il problema artificiale, in particolare il problema duale (4) (che ha un numero minore di righe rispetto al suo primale) senza inserire ancora nessun cammino, che quindi è

$$\begin{gathered}\max \quad \begin{pmatrix} -20 & -10 & -5 & -12 & -8 & 15 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{12} & y_{13} & y_{14} & y_{24} & y_{34} & w_{14} & w_{23} \end{pmatrix}^T \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{12} & y_{13} & y_{14} & y_{24} & y_{34} & w_{14} & w_{23} \end{pmatrix}^T \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_{12} & y_{13} & y_{14} & y_{24} & y_{34} \end{pmatrix}^T \geq 0 \end{gathered}$$

con soluzione

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{12} & \hat{y}_{13} & \hat{y}_{14} & \hat{y}_{24} & \hat{y}_{34} & \hat{w}_{14} & \hat{w}_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si devono risolvere due problemi di cammino minimo (uno da 1 a 4 e l'altro da 2 a 3) con distanze $\hat{y}$. In questo caso particolare le distanze sono tutte nulle, e quindi l'algoritmo di Dijkstra fornirà un cammino qualsiasi. In particolare si trovano i cammini $1 \to 4$ e $2 \to 1 \to 3$ di lunghezza $0 < 1 = w_h$ che vanno quindi inseriti portando al problema

$$\begin{gathered}\max \quad \begin{pmatrix} -20 & -10 & -5 & -12 & -8 & 15 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{12} & y_{13} & y_{14} & y_{24} & y_{34} & w_{14} & w_{23} \end{pmatrix}^T \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{12} & y_{13} & y_{14} & y_{24} & y_{34} & w_{14} & w_{23} \end{pmatrix}^T \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_{12} & y_{13} & y_{14} & y_{24} & y_{34} \end{pmatrix}^T \geq 0 \end{gathered}$$

con soluzione

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{12} & \hat{y}_{13} & \hat{y}_{14} & \hat{y}_{24} & \hat{y}_{34} & \hat{w}_{14} & \hat{w}_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Con questi valori di lunghezza solo il cammino minimo $1 \to 2 \to 4$ viola la condizione di ammissibilità. Aggiungendo il cammino, il problema (4) è

$$\max \quad \begin{pmatrix} -20 & -10 & -5 & -12 & -8 & 15 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{12} & y_{13} & y_{14} & y_{24} & y_{34} & w_{14} & w_{23} \end{pmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (\, y_{12} \quad y_{13} \quad y_{14} \quad y_{24} \quad y_{34} \quad w_{14} \quad w_{23} \,)^T \le \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(\, y_{12} \quad y_{13} \quad y_{14} \quad y_{24} \quad y_{34} \,)^T \ge 0$$

con soluzione

$$(\, \hat{y}_{12} \quad \hat{y}_{13} \quad \hat{y}_{14} \quad \hat{y}_{24} \quad \hat{y}_{34} \quad \hat{w}_{14} \quad \hat{w}_{23} \,) = (\, 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \,)$$

Quindi si è raggiunta l'ottimalità del problema artificiale. La soluzione ottima primale è (gli indici dei cammini sono $1 : 1 \to 2 \to 4$, $2 : 2 \to 1 \to 3$, $3 : 1 \to 4$)

$$\hat{x}_1 = 10, \qquad \hat{x}_2 = 10, \qquad \hat{x}_3 = 5$$

con i seguenti valori di flusso sugli archi

$$f_{12} = 20, \qquad f_{13} = 10, \qquad f_{14} = 5, \qquad f_{24} = 10, \qquad f_{34} = 0$$

Bisogna ora risolvere il problema originale (1) oppure il suo duale (2). I costi dei tre cammini già generati sono $d_1 = 55$, $d_2 = 35$, $d_3 = 5$, e quindi (2) diventa

$$\max \quad (\, -20 \quad -10 \quad -5 \quad -12 \quad -8 \quad 15 \quad 10 \,)\, (\, y_{12} \quad y_{13} \quad y_{14} \quad y_{24} \quad y_{34} \quad w_{14} \quad w_{23} \,)^T$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} (\, y_{12} \quad y_{13} \quad y_{14} \quad y_{24} \quad y_{34} \quad w_{14} \quad w_{23} \,)^T \le \begin{pmatrix} 55 \\ 35 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$(\, y_{12} \quad y_{13} \quad y_{14} \quad y_{24} \quad y_{34} \,)^T \ge 0$$

con soluzione ottima

$$(\, \hat{y}_{12} \quad \hat{y}_{13} \quad \hat{y}_{14} \quad \hat{y}_{24} \quad \hat{y}_{34} \quad \hat{w}_{14} \quad \hat{w}_{23} \,) = (\, 0 \quad 0 \quad 50 \quad 0 \quad 0 \quad 55 \quad 35 \,)$$

Ora bisogna calcolare cammini minimi con lunghezze date dai costi originali più i valori $\hat{y}_e$, cioè

$(1, 2)$	25
$(1, 3)$	10
$(1, 4)$	55
$(2, 4)$	30
$(3, 4)$	10

Si vede direttamente che i cammini $1 \to 2 \to 4$, $1 \to 3 \to 4$ e $1 \to 4$ hanno lunghezze rispettivamente di 55, 20 e 55. Pertanto il cammino $1 \to 3 \to 4$ (di lunghezza $< 55 = \hat{w}_{14}$) viola il vincolo duale e va inserito. Per i cammini $2 \to 1 \to 3$, $2 \to 4 \to 3$ e $2 \to 4 \to 1 \to 3$ si hanno lunghezze rispettivamente di 35, 40 e 95, con nessun valore $< 35 = \hat{w}_{23}$ e quindi non ci sono cammini da inserire. Il nuovo problema è ora

$$\max \quad (\, -20 \quad -10 \quad -5 \quad -12 \quad -8 \quad 15 \quad 10 \,)\, (\, y_{12} \quad y_{13} \quad y_{14} \quad y_{24} \quad y_{34} \quad w_{14} \quad w_{23} \,)^T$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} (\, y_{12} \quad y_{13} \quad y_{14} \quad y_{24} \quad y_{34} \quad w_{14} \quad w_{23} \,)^T \le \begin{pmatrix} 20 \\ 55 \\ 35 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$(\, y_{12} \quad y_{13} \quad y_{14} \quad y_{24} \quad y_{34} \,)^T \ge 0$$

con soluzione ottima

$$(\, \hat{y}_{12} \quad \hat{y}_{13} \quad \hat{y}_{14} \quad \hat{y}_{24} \quad \hat{y}_{34} \quad \hat{w}_{14} \quad \hat{w}_{23} \,) = (\, 0 \quad 35 \quad 50 \quad 0 \quad 0 \quad 55 \quad 70 \,)$$

Le lunghezze per il calcolo dei cammini minimi sono

$(1,2)$	25
$(1,3)$	45
$(1,4)$	55
$(2,4)$	30
$(3,4)$	10

I cammini $1 \to 2 \to 4$, $1 \to 3 \to 4$ e $1 \to 4$ hanno tutti lunghezza $55 = \hat{w}_{14}$. I cammini $2 \to 1 \to 3$, $2 \to 4 \to 3$ e $2 \to 4 \to 1 \to 3$ hanno lunghezze rispettivamente di 70, 40 e 125. Siccome $40 < 70 = \hat{w}_{23}$ bisogna inserire il cammino $2 \to 4 \to 3$. Quindi (2) diventa

$$\max \quad \begin{pmatrix} -20 & -10 & -5 & -12 & -8 & 15 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{12} & y_{13} & y_{14} & y_{24} & y_{34} & w_{14} & w_{23} \end{pmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{12} & y_{13} & y_{14} & y_{24} & y_{34} & w_{14} & w_{23} \end{pmatrix}^T \leq \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 55 \\ 35 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_{12} & y_{13} & y_{14} & y_{24} & y_{34} \end{pmatrix}^T \geq 0$$

con soluzione ottima

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{12} & \hat{y}_{13} & \hat{y}_{14} & \hat{y}_{24} & \hat{y}_{34} & \hat{w}_{14} & \hat{w}_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 50 & 0 & 15 & 55 & 55 \end{pmatrix}$$

e lunghezze per il calcolo dei cammini minimi

$(1,2)$	25
$(1,3)$	30
$(1,4)$	55
$(2,4)$	30
$(3,4)$	25

Si può verificare che nessun cammino viola il vincolo duale e pertanto la soluzione è ottima. L'ottimo primale vale

$$\hat{x}_1 = 4, \qquad \hat{x}_2 = 4, \qquad \hat{x}_3 = 6 \qquad \hat{x}_4 = 6 \qquad \hat{x}_5 = 5$$

con indici corrispondenti ai cammini: $1 : 2 \to 4 \to 3$; $2 : 1 \to 3 \to 4$; $3 : 1 \to 2 \to 4$; $4 : 2 \to 1 \to 3$; $5 : 1 \to 4$ con i seguenti valori di flusso sugli archi

$$f_{12} = 12, \qquad f_{13} = 10, \qquad f_{14} = 5, \qquad f_{24} = 10, \qquad f_{34} = 8$$

e costo ottimo pari a 805.