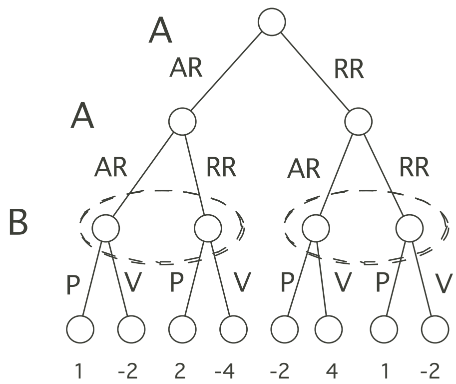
1) Il giocatore A ha in mano tre carte, due re ed un asso. Toglie una carta, senza farla vedere, e depone le altre due sul tavolo a faccia in giù. Se depone asso e re questa mano vale più dell'altra di due re. Poi dichiara "Asso, re" oppure "Due re". Il giocatore B può passare oppure vedere. Se la dichiarazione di A è veritiera e B passa, A vince 1. Se A dichiara la mano migliore di quella che è e B passa, A vince 2. Se A dichiara la mano peggiore di quella che è e B passa, A perde 2. Se B vede, le precedenti vincite sono raddoppiate e invertite di segno. Sviluppare il gioco in forma estesa ed in forma normale e risolvere il gioco.

Soluzione

Per rappresentare il gioco in forma estesa possiamo sempre pensare che la dichiarazione di A precede la deposizione delle carte sul tavolo. A questo punto al giocatore B è nota la dichiarazione di A ma non la scelta delle carte. Pertanto il gioco è ad informazione non completa. Il diagramma è il seguente:



dove la radice dell'albero corrisponde alla dichiarazione "asso-re" (AR) oppure "due re" (RR). Il successivo livello corrisponde alla scelta delle carte deposte sul tavolo. A questo punto B può passare (P) oppure vedere (V). A ha a disposizione 4 strategie a seconda delle combinazioni fra dichiarazione e disposizione effettiva delle carte. B ha 4 strategie perché può decidere di passare o vedere se si trova nel primo insieme d'informazione (corrispondente alla dichiarazione "asso-re") e analogamente nel secondo. Quindi il gioco in forma normale è dato dalla seguente tabellina 4×4:

	P-P	P-V	V-P	V-V
AR-AR	1	1	-2	-2
AR-RR	2	2	-4	-4
RR-AR	-2	4	-2	4
RR-RR	1	-2	1	-2

Risolvendo il gioco si trova $x_A = (0, 0, 1/3, 2/3)$ e $y_B = (1/3, 1/3, 1/3, 0)$. Si noti che A, in ottimalità, non dovrebbe mai dichiarare "Asso-re". Questo risulta anche evidente esaminando l'albero del gioco in forma estesa. Nel primo insieme d'informazione (corrispondente alla dichiarazione "Asso-re") B possiede una strategia vincente pur non conoscendo le carte sul tavolo. Al giocatore B conviene in ogni caso vedere guadagnando 2 o 4 e quindi A non ha interesse a scegliere questa parte del gioco. A quindi dichiarerà sempre "Due re" (con il che il gioco diminuisce d'interesse ovviamente) e due volte su tre disporrà le carte in modo veritiero rispetto alla dichiarazione. Data questa strategia di A, la strategia di B si può sintetizzare in “passare due volte su tre”. Il valore atteso del gioco è zero, quindi il gioco è onesto.

2) Si consideri la seguente versione in scala ridotta del gioco della briscola: i semi sono solo due, ad esempio spade e denari, e le carte per seme sono solo tre, asso, due e tre. Indichiamo le sei carte con S1, S2, S3, D1, D2 e D3. I punti e il valore delle carte sono i medesimi che nella briscola ordinaria. Inoltre vengono date soltanto due carte ai giocatori, per cui rimangono sul tavolo solo due carte di cui una determina la briscola. Per semplificare ancora assumiamo che il gioco sia a carte scoperte e quindi l'informazione è completa.

Si scriva il gioco in forma estesa per una particolare smazzata, scelta a piacere (quante sono le smazzate diverse fra loro?) e si determini la soluzione del gioco. Si scriva la forma normale elencando le strategie dei due giocatori.

Soluzione:

Si prenda in esame la seguente smazzata (ce ne sono $\binom{6}{2}\binom{4}{2} = 90$ in tutto): il giocatore A riceve S1 e D2, B riceve S3 e D1 mentre D3 determina la briscola di denari. L'albero è rappresentato in figura 1. Si noti che, date le regole del gioco, il livello dell'albero non determina automaticamente a chi spetta la mossa. Il simbolo indicato in ogni nodo denota il giocatore cui spetta la mossa. L'esito del gioco è indicato nelle foglie dell'albero con riferimento al giocatore A. In figura 2 si vede il calcolo delle strategie ottime. Questa smazzata vede B avvantaggiato in quanto riesce a garantirsi un guadagno di 2.

In figura 3 sono evidenziati i nodi controllati dal giocatore A e dal giocatore B. Come si vede A ha disposizione 16 strategie diverse e B ne ha a disposizione 36. Le strategie di A sono elencate qui sotto, indicando per ogni nodo controllato da A le scelte da effettuare. Le strategie di B sono indicate nella tabella del gioco in forma normale. Dalla tabella si vede che il gioco ha due coppie di strategie di equilibrio (l'esistenza di strategie di equilibrio è garantita essendo il gioco ad informazione completa) corrispondenti a (1-D1; 2-S3; 3-S3; 7-D1; 8-S2;) per B e le strategie (1-D2; 3-S1; 6-S1; 7-S2) oppure (1-D2; 3-D3; 6-S1; 7-S2;) per A.

1 =1-S1; 2-D3; 4-D2; 5-D2;

2 =1-S1; 2-D3; 4-D2; 5-S2;

3 =1-S1; 2-D3; 4-S2; 5-D2;

4 =1-S1; 2-D3; 4-S2; 5-S2;

5 =1-S1; 2-D2; 4-D2; 5-D2;

6 =1-S1; 2-D2; 4-D2; 5-S2;

7 =1-S1; 2-D2; 4-S2; 5-D2;

8 =1-S1; 2-D2; 4-S2; 5-S2;

9 =1-D2; 3-S1; 6-S1; 7-S1;

10=1-D2; 3-S1; 6-S1; 7-S2;

11=1-D2; 3-S1; 6-S2; 7-S1;

12=1-D2; 3-S1; 6-S2; 7-S2;

13=1-D2; 3-D3; 6-S1; 7-S1;

14=1-D2; 3-D3; 6-S1; 7-S2;

15=1-D2; 3-D3; 6-S2; 7-S1;

16=1-D2; 3-D3; 6-S2; 7-S2;

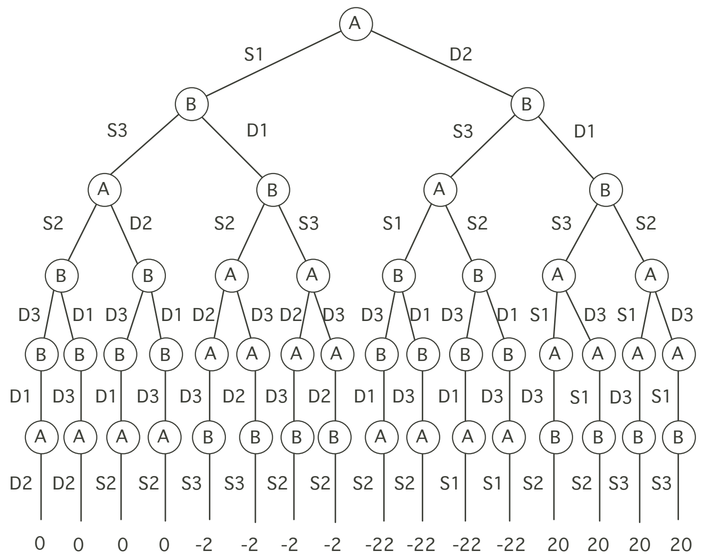


figura 1

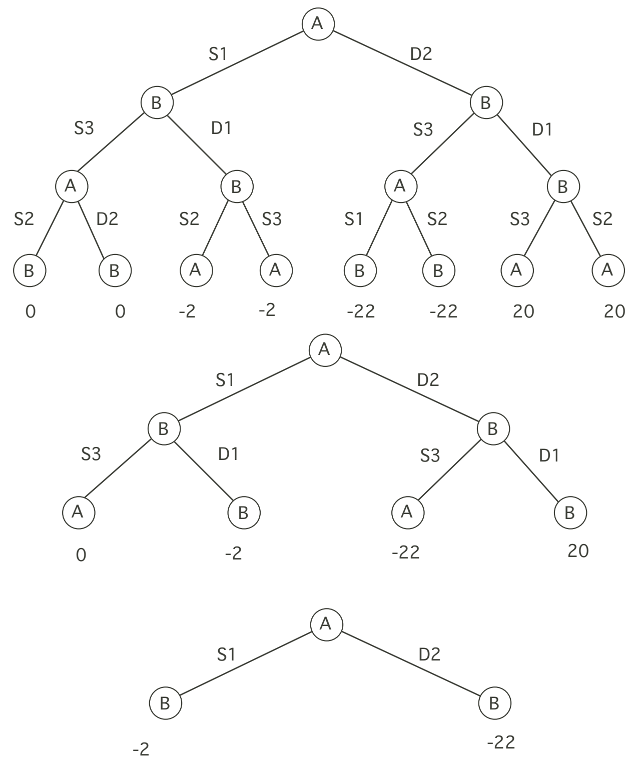


figura 2

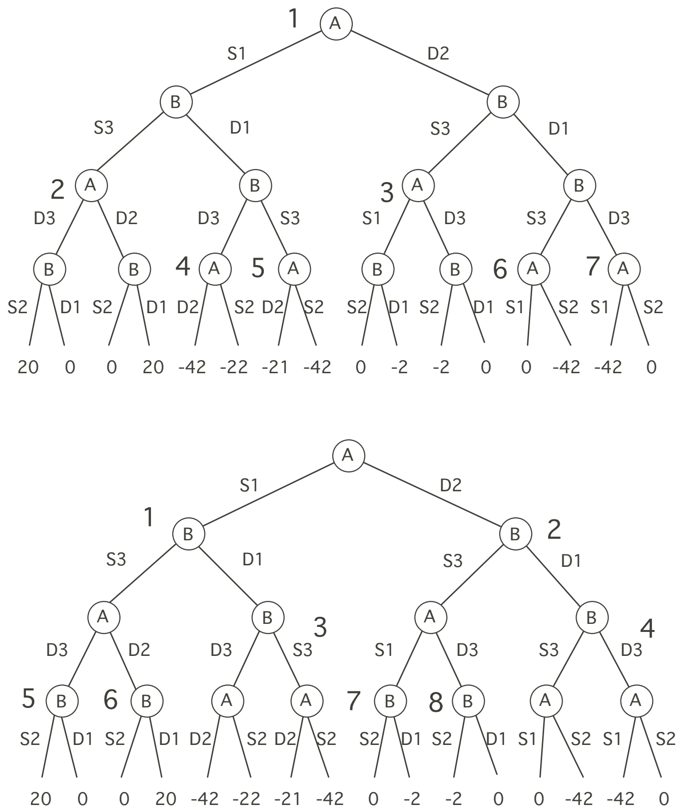

1 A
S1 D2
B B
S3 D1 S3 D1
2 A B 3 A B
D3 D2 D3 S3 S1 D3 S3 D3
B B 4 A 5 A B B 6 A 7 A
S2 D1 S2 D1 D2 S2 D2 S2 S2 D1 S2 D1 S1 S2 S1 S2
20 0 0 20 -42 -22 -21 -42 0 -2 -2 0 0 -42 -42 0
A
S1 D2
1 B B 2
S3 D1 S3 D1
A B 3 A B 4
D3 D2 D3 S3 S1 D3 S3 D3
5 B 6 B A A 7 B 8 B A A
S2 D1 S2 D1 D2 S2 D2 S2 S2 D1 S2 D1 S1 S2 S1 S2
20 0 0 20 -42 -22 -21 -42 0 -2 -2 0 0 -42 -42 0

figura 3

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$1-S3;2-S3;5-S2;6-S2;7-S2;8-S2;$	20	20	20	20	0	0	0	0	0	0	0	0	−2	−2	−2	−2
$1-S3;2-S3;5-S2;6-S2;7-S2;8-D1;$	20	20	20	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$1-S3;2-S3;5-S2;6-S2;7-D1;8-S2;$	20	20	20	20	0	0	0	0	−2	−2	−2	−2	−2	−2	−2	−2
$1-S3;2-S3;5-S2;6-S2;7-D1;8-D1;$	20	20	20	20	0	0	0	0	−2	−2	−2	−2	0	0	0	0
$1-S3;2-S3;5-S2;6-D1;7-S2;8-S2;$	20	20	20	20	20	20	20	20	0	0	0	0	−2	−2	−2	−2
$1-S3;2-S3;5-S2;6-D1;7-S2;8-D1;$	20	20	20	20	20	20	20	20	0	0	0	0	0	0	0	0
$1-S3;2-S3;5-S2;6-D1;7-D1;8-S2;$	20	20	20	20	20	20	20	20	−2	−2	−2	−2	−2	−2	−2	−2
$1-S3;2-S3;5-S2;6-D1;7-D1;8-D1;$	20	20	20	20	20	20	20	20	−2	−2	−2	−2	0	0	0	0
$1-S3;2-S3;5-D1;6-S2;7-S2;8-S2;$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−2	−2	−2	−2
$1-S3;2-S3;5-D1;6-S2;7-S2;8-D1;$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$1-S3;2-S3;5-D1;6-S2;7-D1;8-S2;$	0	0	0	0	0	0	0	0	−2	−2	−2	−2	−2	−2	−2	−2
$1-S3;2-S3;5-D1;6-S2;7-D1;8-D1;$	0	0	0	0	0	0	0	0	−2	−2	−2	−2	0	0	0	0
$1-S3;2-S3;5-D1;6-D1;7-S2;8-S2;$	0	0	0	0	20	20	20	20	0	0	0	0	−2	−2	−2	−2
$1-S3;2-S3;5-D1;6-D1;7-S2;8-D1;$	0	0	0	0	20	20	20	20	0	0	0	0	0	0	0	0
$1-S3;2-S3;5-D1;6-D1;7-D1;8-S2;$	0	0	0	0	20	20	20	20	−2	−2	−2	−2	−2	−2	−2	−2
$1-S3;2-S3;5-D1;6-D1;7-D1;8-D1;$	0	0	0	0	20	20	20	20	−2	−2	−2	−2	0	0	0	0
$1-S3;2-D1;5-S2;6-S2;4-S3;$	20	20	20	20	0	0	0	0	0	0	−42	−42	0	0	−42	−42
$1-S3;2-D1;5-S2;6-S2;4-D3;$	20	20	20	20	0	0	0	0	−42	0	−42	0	−42	0	−42	0
$1-S3;2-D1;5-S2;6-D1;4-S3;$	20	20	20	20	20	20	20	20	0	0	−42	−42	0	0	−42	−42
$1-S3;2-D1;5-S2;6-D1;4-D3;$	20	20	20	20	20	20	20	20	−42	0	−42	0	−42	0	−42	0
$1-S3;2-D1;5-D1;6-S2;4-S3;$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−42	−42	0	0	−42	−42
$1-S3;2-D1;5-D1;6-S2;4-D3;$	0	0	0	0	0	0	0	0	−42	0	−42	0	−42	0	−42	0
$1-S3;2-D1;5-D1;6-D1;4-S3;$	0	0	0	0	20	20	20	20	0	0	−42	−42	0	0	−42	−42
$1-S3;2-D1;5-D1;6-D1;4-D3;$	0	0	0	0	20	20	20	20	−42	0	−42	0	−42	0	−42	0
$1-D1;2-S3;3-D3;7-S2;8-S2;$	−42	−42	−22	−22	−42	−42	−22	−22	0	0	0	0	−2	−2	−2	−2
$1-D1;2-S3;3-D3;7-S2;8-D1;$	−42	−42	−22	−22	−42	−42	−22	−22	0	0	0	0	0	0	0	0
$1-D1;2-S3;3-D3;7-D1;8-S2;$	−42	−42	−22	−22	−42	−42	−22	−22	−2	−2	−2	−2	−2	−2	−2	−2
$1-D1;2-S3;3-D3;7-D1;8-D1;$	−42	−42	−22	−22	−42	−42	−22	−22	−2	−2	−2	−2	0	0	0	0
$1-D1;2-S3;3-S3;7-S2;8-S2;$	−21	−42	−21	−42	−21	−42	−21	−42	0	0	0	0	−2	−2	−2	−2
$1-D1;2-S3;3-S3;7-S2;8-D1;$	−21	−42	−21	−42	−21	−42	−21	−42	0	0	0	0	0	0	0	0
$1-D1;2-S3;3-S3;7-D1;8-S2;$	−21	−42	−21	−42	−21	−42	−21	−42	−2	**−2**	−2	−2	−2	**−2**	−2	−2
$1-D1;2-S3;3-S3;7-D1;8-D1;$	−21	−42	−21	−42	−21	−42	−21	−42	−2	−2	−2	−2	0	0	0	0
$1-D1;2-D1;3-D3;4-S3;$	−42	−42	−22	−22	−42	−42	−22	−22	0	0	−42	−42	0	0	−42	−42
$1-D1;2-D1;3-D3;4-D3;$	−42	−42	−22	−22	−42	−42	−22	−22	−42	0	−42	0	−42	0	−42	0
$1-D1;2-D1;3-S3;4-S3;$	−21	−42	−21	−42	−21	−42	−21	−42	0	0	−42	−42	0	0	−42	−42
$1-D1;2-D1;3-S3;4-D3;$	−21	−42	−21	−42	−21	−42	−21	−42	−42	0	−42	0	−42	0	−42	0