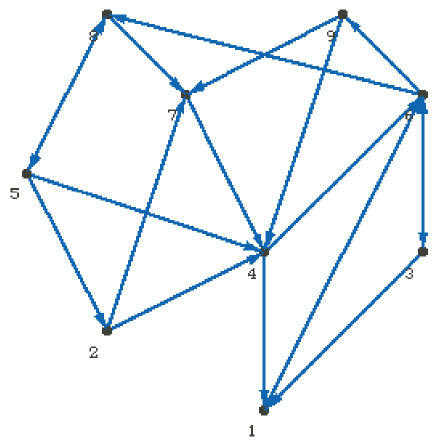
1) Si consideri un insieme di piste da sci e di impianti di risalita. Lo si modelli con un grafo orientato che abbia archi di due tipi: tipo $D$ (discesa e orientato nel senso della discesa) e tipo $R$ (risalita e orientato nel senso della risalita). Si supponga il grafo fortemente connesso (cioè da ogni punto si può raggiungere ogni altro punto).

Si supponga di voler sciare su tutte le piste (cioè almeno una volta su ogni discesa), impiegando il minor tempo possibile su impianti di risalita. Si deve quindi supporre che ad ogni impianto di risalita sia associato un tempo comprensivo ad esempio del tempo di coda e del tempo di risalita. Si può dimostrare che il problema è NP-hard (dimostrazione non richiesta).

Si può modellare il problema come un flusso di costo minimo con una condizione aggiuntiva (che lo rende appunto difficile). Si risolva in particolare la seguente istanza con l'algoritmo che fa uso degli pseudoflussi ottimi notando che la condizione aggiuntiva è automaticamente soddisfatta:

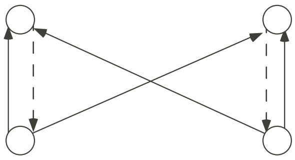



dove fra i nodi 5 e 8 e fra i nodi 3 e 6 esiste sia la discesa che la risalita. Siano assegnati i seguenti tempi per le risalite: $1 \to 6 = 25$ min., $2 \to 4 = 15$, $2 \to 7 = 18$, $3 \to 6 = 10$, $4 \to 6 = 20$, $5 \to 8 = 12$, $6 \to 8 = 15$, $6 \to 9 = 8$.

**Soluzione**

Dimostriamo dapprima che il problema è NP-hard, trasformandolo dal TSP asimmetrico. Si noti che il grafo del problema è di tipo particolare, in quanto esistono due tipi di archi ($R$ e $D$) e i nodi possono essere numerati (corrispondentemente ad un'altezza normalizzata) in modo che l'arco $(i, j)$ è di tipo $D$ se e solo se $i > j$. Quindi nella trasformzione dal TSP asimmetrico bisogna tenere conto di questa peculiarità. Data un'istanza di TSP asimmetrico, si crei per ogni nodo una coppia di nodi. Nel primo dei nodi di ogni coppia vengono fatti entrare tutti gli archi diretti verso il nodo originale e dal secondo vengono fatti uscire tutti gli archi dal nodo originale. Inoltre per ogni coppia viene creato un arco dal primo al secondo nodo. I primi nodi vengano etichettati $n + 1, n + 2, \ldots 2n$ e i secondi $1, 2, \ldots, n$. Gli archi originali siano di tipo $R$ con il costo originale e gli archi aggiunti fra le coppie di nodi siano di tipo $D$. Come si vede la richiesta di sciare su tutte le piste almeno una volta a costo minimo corrisponde a trovare un tour di costo minimo nel grafo originale.

Si può pensare al problema come ad una unità di flusso (lo sciatore) che percorre il grafo entrando ed uscendo da ogni nodo. Si tratta quindi di trovare una circolazione. Siccome ogni arco di discesa va percorso almeno una volta, ci deve essere in tali archi una limitazione inferiore di capacità uguale a 1. Gli archi di discesa hanno costo 0 e quelli di risalita un costo pari al tempo indicato. Questo modello è tuttavia inaccurato perché la circolazione risultante potrebbe essere costituita da circuiti disgiunti come nel seguente controesempio



dove, se gli archi diagonali hanno un costo elevato, la soluzione ottima è costituita dai due circuiti formati dagli archi verticali. Tuttavia se la circolazione risultante dà luogo ad un grafo connesso (e necessariamente euleriano) la soluzione è semplicemente il cammino euleriano.

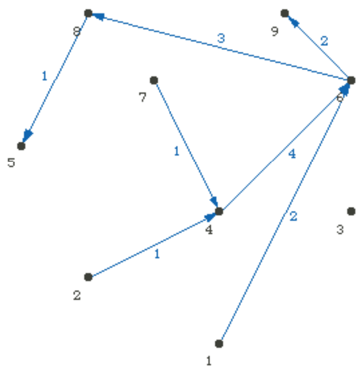
Se la soluzione non è connessa si può adottare una strategia branch-and-bound imponendo agli archi di un taglio (necessariamente di tipo $R$) di essere a turno nella soluzione ottima.

Risolvendo l'istanza con l'algoritmo che fa uso degli pseudoflussi, bisogna trasformare in elementari gli archi di discesa (quelli di risalita lo sono già) traslando di una unità verso sinistra le curve caratteristiche. Questo comporta un aumento unitario di divergenza in ogni nodo di arrivo di una discesa e una diminuzione unitaria in ogni nodo di partenza di una discesa. Sommando su tutti gli archi di discesa si ottengono nei nodi valori interi positivi e negativi di divergenza. Si può quindi creare un grafo bipartito con i nodi di sinistra a divergenza positiva e quelli di destra a divergenza negativa. Da ogni arco di sinistra ad ogni arco di destra si crea un arco pari al minimo cammino fra i nodi. Si è quindi trovata un'istanza di un problema di trasporto.

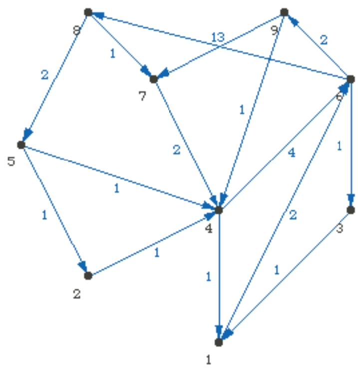
Risolvendo l'istanza data con l'algoritmo pseudoflussi, si ottengono i seguenti valori di divergenza $b = \{2, 1, 0, 2, -1, -1, 1, -2, -2\}$. Inizialmente quindi $\varepsilon = 2$, con sorgenti $S = \{1, 4\}$ e pozzi $T = \{8, 9\}$. La soluzione iniziale è flusso e potenziale nulli. Si ottengono il cammino minimo $\mathbf{1} \to 6 \to 9$ che porta ad un potenziale $u = \{0, 33, 25, 33, 33, 25, 33, 33, 33\}$ e il cammino minimo $4 \to 6 \to 8$ con potenziale $u = \{28, 68, 53, 33, 68, 53, 61, 68, 61\}$.

Successivamente $\varepsilon = 1$, $S = \{2, 7\}$ e $T = \{5, 6\}$. Il cammino minimo è $2 \to 4 \to 6$ ($u = \{78, 68, 103, 83, 118, 103, 86, 118, 111\}$) e poi $7 \to 4 \to 6 \to 8 \to 5$ con valore finale di potenziale $u = \{81, 71, 106, 86, 121, 106, 86, 121, 114\}$

Il valore di flusso che si ottiene è



che va modificato tenendo conto delle trasformazioni sulle curve caratteristiche. La soluzione è quindi




che corrisponde ad un gafo euleriano connesso. Quindi è ottima.

2) Si indichi come procedere per ottenere una soluzione ammissibile di base iniziale per il metodo del simplesso su reti di flusso (supponendo che per nessun arco sia $c_e^- = -\infty$ ed anche $c_e^+ = +\infty$), usando ancora il metodo del simplesso ma su una rete modificata e come poi passare dalla soluzione di base della rete modificata alla soluzione di base della rete originale. Si tratta quindi di sviluppare una Fase I per il metodo del simplesso su reti di flusso. (facoltativo: si vuole ottenere una soluzione di base fortemente ammissibile)

**Soluzione**

Si inizializzi il flusso arbitrariamente come $x_e := c_e^-$ oppure $x_e := c_e^+$. Poi si aggiunga un nodo (che etichettiamo come 0). Si calcoli la divergenza $y_i$ in ogni nodo. Se $b_i \geq y_i$ si aggiunge un arco $(i, 0)$ con capacità $[0, +\infty]$ e si assegna flusso iniziale $x_{i,0} := b_i - y_i$. Se $b_i < y_i$ si aggiunge un arco $(0, i)$ con capacità $[0, +\infty]$ e si assegna flusso iniziale $x_{0,i} := y_i - b_i$. Si noti che nel grafo esteso ogni nodo ha ora divergenza $b_i$. Quindi se si riesce ad annullare il flusso negli archi aggiunti la soluzione negli altri archi rispetta il vincolo di divergenza. Agli archi aggiunti viene quindi assegnato costo uguale a 1, tutti gli archi originali ricevono costo 0. Come base iniziale si sceglie la stella con radice nel nodo 0. Questa base può essere degenere se $y_i = b_i$ per qualche nodo. Questa base è comunque fortemente ammissibile.

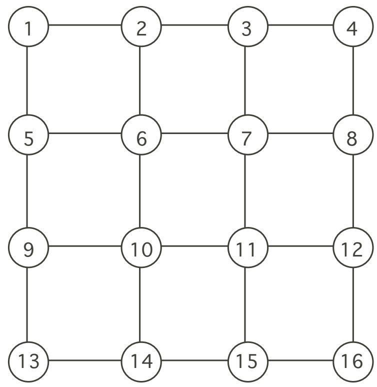
Se nel grafo originario esiste una soluzione ammissibile allora il metodo del simplesso terminerà assegnando flusso nullo agli archi aggiunti. Almeno uno di questi archi deve essere in base (il nodo 0 è radice). Se vi è esattamente un arco aggiunto $(0, k)$ (o $(k, 0)$) in base allora la soluzione di base per la rete originale si ottiene semplicemente togliendo il nodo 0 e tutti gli archi aggiunti e considerando l'albero rimanente con radice $k$.

Se invece vi sono più archi aggiunti in base (con flusso nullo), togliendo il nodo 0 e gli archi aggiunti l'albero si decompone in tante componenti connesse quanti sono gli archi aggiunti in base. Basta allora connettere arbitrariamente queste componenti in modo da ripristinare un albero di supporto. Ovviamente la soluzione che si ottiene in questo caso è degenere.

Nel caso si voglia ottenere una base fortemente ammissibile e l'iterazione faccia necessariamente uso della regola speciale per la determinazione dell'arco da far uscire dalla base si noti che in ottimalità gli archi aggiunti $(0, i)$ non possono far parte della base perché violerebbero la proprietà di base fortemente ammissibile. Quindi solo archi del tipo $(i, 0)$ possono essere presenti in base. Se vi è un solo arco $(k, 0)$ il sottoalbero appeso a $k$ costituisce un albero di supporto per il grafo originale e la base è fortemente ammissibile.

Se invece vi sono più archi aggiunti in base $(k1, 0)$, $(k2, 0)$, etc., si può procedere così: ad ogni nodo $k1$, $k2$, ..., sono appesi sottoalberi $T1$, $T2$, .... Fissiamo il nodo $k1$ come 'principale'. Consideriamo ora l'albero $T_2$ e prendiamo un arco arbitrario che connetta $T_1$ con $T_2$. Tale arco esiste altrimenti il grafo sarebbe sconnesso. Consideriamo il circuito generato da tale arco con orientazione $k_2 \rightsquigarrow k_1 \rightsquigarrow 0 \rightsquigarrow k_2$ e iteriamo come se il metodo del simplesso dovesse continuare. L'iterazione è degenere a causa dell'arco vuoto $(k_2, 0)$. Per decidere quale arco del ciclo far uscire si deve usare la regola. Se è l'arco $(k_2, 0)$ siamo a posto, altrimenti deve essere un arco in $T_2$ (altrimenti la base non sarebbe fortemente ammissibile). Così facendo un sottoalbero di $T_2$ viene appeso a $T_1$. Si ridefiniscano $T_1$ e $T_2$ dopo questa operazione e si proceda ricorsivamente. Siccome ad ogni iterazione $T_2$ perde almeno un nodo, dopo al più $|T_2|$ (con $T_2$ iniziale) iterazioni si può eliminare l'arco $(k_2, 0)$ dall'albero. Poi si procede nello stesso modo con $T_3$ ecc. Sono richieste quindi al più $n$ iterazioni del metodo del simplesso per trovare una base fortemente ammissibile a partire dalla base ottima e fortemente ammissibile della Fase I.

4) Si calcoli il flusso di costo minimo per la seguente rete




dove un flusso di 14 unità parte da 1 ed arriva in 16 (conservazione del flusso su tutti gli altri nodi) e la funzione obiettivo è

$$\min \sum_e \frac{1}{2} x_e^2.$$

**Soluzione**

Ogni curva caratteristica è una retta $v_e = x_e$. Quindi si tratta di imporre sistematicamente questo vincolo. Per simmetria supponiamo che il flusso si divida in parti uguali dai due archi uscenti da 1. Quindi $x_{1,2} = x_{1,5} = v_{1,2} = v_{1,5} = 7$. Allora $u_1 = 0$ (questo si può sempre supporre) e $u_2 = 7$, $u_5 = 7$. Il flusso entrante in 2 si divide in due parti, per il momento non note. Sia quindi $x_{2,3} = x$ e $x_{2,6} = 7-x$. La somma delle tensioni su ogni cammino deve dipendere solo dai nodi di arrivo e partenza del cammino. Quindi $x_{5,6} = 7-x$ e allora $x_{5,9} = x$. Per simmetria $x_{6,7} = x_{6,10}$ e, per la conservazione del flusso nel nodo 6, $x_{6,7} = x_{6,10} = 7 - x$. Per la proprietà della somma delle tensioni sui cammini $x_{3,7} = 14 - 3x$. Per la conservazione del flusso in 3, $x_{3,4} = 4x - 14$ e altrettanto $x_{4,8} = 4x - 14$. Per la proprietà della somma delle tensioni sui cammini $x_{7,8} = 11x - 42$. Per la conservazione del flusso in 7, $x_{7,11} = 63 - 15x$ e in 8 $x_{8,12} = 15x - 56$. Per simmetria e conservazione del flusso $x_{11,12} = x_{11,15} = 63 - 15x$. Però per la proprietà dei cammini si deve anche avere $x_{7,8} + x_{8,12} = x_{7,11} + x_{11,12}$ da cui $11x - 42 + 15x - 56 = 63 - 15x + 63 - 15x$. Risolvendo si trova $x = 4$. Si nota che $x_{12,16} = 7$ (come deve essere). Sostituendo questo valore di $x$ si ha la seguente soluzione