6.14 Esercizio. Si risolva il seguente problema (sfruttando il problema duale)

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j \\ & \sum_{j=1}^{i} \quad x_j \le b_i \qquad i := 1, \ldots, n \\ & \qquad\; x_j \ge \; 0 \qquad j := 1, \ldots, n \end{aligned}$$

nell'ipotesi $0 \le b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$ e $0 \le c_n \le c_{n-1} \le \ldots \le c_1$. Si risolva nuovamente rimuovendo l'ipotesi.

Soluzione. Nell'ipotesi $0 \le b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$ e $0 \le c_n \le c_{n-1} \le \ldots \le c_1$ il problema si può risolvere agevolmente con un ragionamento diretto. Dato l'ordine dei coefficienti della funzione obiettivo è più conveniente assegnare il massimo valore possibile a x_1. Dato l'ordine dei coefficienti b_i tale valore è b_1. Ora si procede ricorsivamente assegnando $x_i := b_i - b_{i-1}$ per $i := 2, \ldots, n$. L'ottimalità di questa soluzione può essere provata costruendo il duale

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{n} b_i\, u_i \\ & \sum_{i=j}^{n} \quad u_i \ge c_j \qquad j := 1, \ldots, n \\ & \qquad\; u_i \ge \; 0 \qquad i := 1, \ldots, n \end{aligned}$$

e notando che la soluzione $u_i := c_i - c_{i+1}$, per $i := 1, \ldots, n$ e ponendo per convenzione $c_{n+1} := 0$, è ammissibile nel duale e che i valori dei due obiettivi sono uguali (si ponga per convenzione $b_0 := 0$).

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i = \sum_{i=1}^{n} c_i\, (b_i - b_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, b_i - \sum_{i=2}^{n+1} c_i\, b_{i-1} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\, b_i - \sum_{i=1}^{n} c_{i+1}\, b_i = \sum_{i=1}^{n} (c_i - c_{i+1})\, b_i = \sum_{i=1}^{n} u_i\, b_i$$

Se si rimuove l'ipotesi sull'ordinamento dei coefficienti, si può notare come la relazione $b_{i+1} < b_i$ implichi la ridondanza del vincolo i-mo. Infatti

$$\sum_{j=1}^{i} x_j \le \sum_{j=1}^{i+1} x_j \le b_{i+1} < b_i$$

Quindi si può eliminare tale vincolo e la variabile duale corrispondente. Analogamente nel problema duale la relazione $c_j < c_{j+1}$ implica la ridondanza del vincolo j-mo del duale. Infatti

$$\sum_{i=j}^{n} u_i \ge \sum_{i=j+1}^{n} u_i \ge c_{j+1} > c_j$$

e quindi si può eliminare tale vincolo insieme alla corrispondente variabile primale. L'eliminazione della variabile i-ma nel duale comporta la presenza di due vincoli uno dei quali diventa ridondante. Infatti, una volta posto ad esempio $u_i := 0$ si ha

$$\sum_{i=j+1}^{n} u_i \ge c_j\,; \qquad \sum_{i=j+1}^{n} u_i \ge c_{j+1}$$

Eliminato il vincolo duale corrispondente al minore dei due valori c_j e c_{j+1} si elimina la corrispondente variabile primale. Si procede allora ricorsivamente eliminando a turno nel problema duale e in quello duale variabili e vincoli fino a creare un ciclo di variabili eliminate. Esempio:

$$
\begin{array}{llllll}
\max & 3\,x_1 + 2\,x_2 + 5\,x_3 + 3\,x_4 \\
& x_1 & & & & \leq 3 \\
& x_1 + & x_2 & & & \leq 4 \\
& x_1 + & x_2 + & x_3 & & \leq 5 \\
& x_1 + & x_2 + & x_3 + & x_4 & \leq 4 \\
& x_i \geq 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llllll}
\min & 3\,u_1 + 4\,u_2 + 5\,u_3 + 4\,u_4 \\
& u_1 + & u_2 + & u_3 + & u_4 & \geq 3 \\
& & u_2 + & u_3 + & u_4 & \geq 2 \\
& & & u_3 + & u_4 & \geq 5 \\
& & & & u_4 & \geq 3 \\
& u_i \geq 0
\end{array}
$$

Scandendo i coefficienti b_i si vede che il terzo vincolo primale è ridondante. Allora $u_3 := 0$. Con questo assegnamento il quarto vincolo duale diventa ridondante e quindi $x_4 := 0$. Questo assegnamento non provoca un ulteriore eliminazione perché il terzo vincolo è già stato eliminato. Il problema è quindi diventato

$$
\begin{array}{lllll}
\max & 3\,x_1 + 2\,x_2 + 5\,x_3 \\
& x_1 & & & \leq 3 \\
& x_1 + & x_2 & & \leq 4 \\
& x_1 + & x_2 + & x_3 & \leq 4 \\
& x_i \geq 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lllll}
\min & 3\,u_1 + 4\,u_2 + 4\,u_4 \\
& u_1 + & u_2 + & u_4 & \geq 3 \\
& & u_2 + & u_4 & \geq 2 \\
& & & u_4 & \geq 5 \\
& u_i \geq 0
\end{array}
$$

Notiamo ora che il primo e secondo vincolo duale sono ridondanti, quindi $x_1 := 0$ e $x_2 := 0$. Con questo assegnamento diventano ridondanti il primo e il secondo vincolo primale, da cui $u_1 := 0$ e $u_2 := 0$. la soluzione è allora $x_3 := 4$ e $ui_4 := 5$.

Il problema può allora essere risolto con una scansione dei coefficienti ed eliminazione di vincoli e variabili nei due problemi. Alla fine di questa operazione il nuovo problema rispetta l'ipotesi.

Basandosi su questa struttura è facile ricavare un metodo diretto che con complessità $O(n)$ trova la soluzione:

begin
    $\hat{c} := c_n$
    for $j := n-1$ **to** 1 **do**
        if $c_j < \hat{c}$
        then $x_j := 0$
        else $\hat{c} := c_j$
    $\hat{b} := b_n$
    for $j := n-1$ **to** 1 **do**
        if $b_j > \hat{c}$
        then $b_j := \hat{b}$
        else $\hat{b} := b_j$
    for $j := 1$ **to** n **do**
        if $x_j \neq 0$
        then $x_j := b_j - \sum_{i<j} x_i$
end

∎