5.24 Esercizio. Dato il grafo di figura 5.8, si determini tramite il problema duale il minimo albero di supporto con grado minore o uguale a 4 nel nodo centrale. Porre come unico vincolo esplicito il vincolo sul grado. ∎

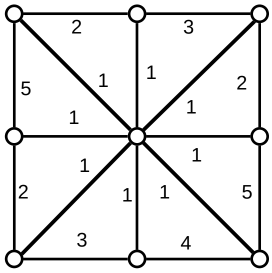



Figura 5.8

Soluzione. Sia

$$X : \Big\{ x \in \mathbb{R}^{|E|} : \ x \text{ è vettore d'incidenza su } E \text{ di un albero di supporto} \Big\}$$

Allora il problema può essere formalizzato in generale come:

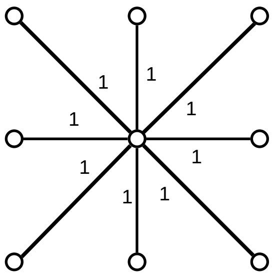
$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{e \in E} c_e \, x_e \\ & \sum_{e \in \delta(k)} x_e \le b \\ & x \in X \end{aligned}$$

con $\delta(k)$ gli archi del taglio individuato dal nodo $k$. La funzione duale diventa

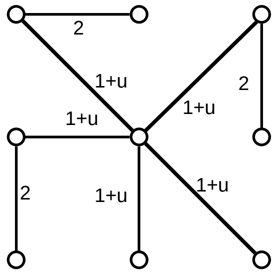
$$L(u) = \min_{x \in X} \sum_{e \in E} c_e \, x_e + u \, ( \sum_{e \in \delta(k)} x_e - b) = -u \, b + \sum_{e \in E} (c_e + [e \in \delta(k)] \, u) \, x_e$$

e si riduce pertanto al calcolo di un minimo albero di supporto con costi modificati rispetto a quelli originali sugli archi del taglio $\delta(k)$.

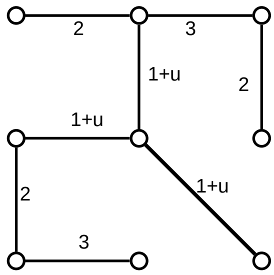
Per $u := 0$ si ottiene come minimo albero di supporto



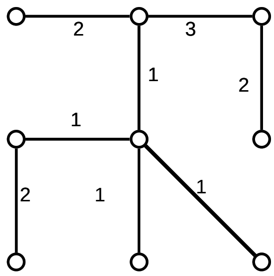

con valore di funzione duale $L(u) = 8$ e grado 8 nel nodo centrale. Aumentando $u$ si aumentano della stessa quantità i valori sugli archi incidenti nel nodo centrale. Il minimo valore di $u$ per cui si ha un cambiamento nel minimo albero di supporto è $u := 1$. Per valori di $u$ tali che $1 < u < 2$ una soluzione è (ce ne sono altre sette con uguale valore)




con $L(u) = 11 + u$. Il successivo valore di $u$ per cui si ha un cambiamento nel minimo albero di supporto è $u := 2$. Per valori di $u$ tali che $2 < u < 3$ una soluzione è (ce ne sono altre undici con uguale valore)




con $L(u) = 15 - u$. L'ottimo duale si ha pertanto per $u = 2$ con $L(2) = 13$. Per $u := 2$ vi sono molte soluzioni fra cui anche




chiaramente ottimo.