

5.22 ESERCIZIO. Come costruire un'istanza (non banale) del TSP per cui valga la dualità forte?

SOLUZIONE. Si scelga arbitrariamente un vettore di variabili duali u_1, u_2, \dots, u_n . Si scelga arbitrariamente un circuito hamiltoniano. Si definiscano costi \bar{c}_{ij} in modo che il minimo quasi-albero sia il circuito (ad esempio, nel modo più semplice, facendo sì che i valori minori di \bar{c}_{ij} siano sul circuito hamiltoniano). Dopodiché si definiscano i costi come $c_{ij} := \bar{c}_{ij} + u_i + u_j$. Se qualche valore è negativo basta aggiungere un valore costante a tutti i costi. Esempio: per $n = 6$ sia

$$u = \{0, 10, 5, -12, -6, 3\}$$

Si noti che c'è ridondanza nella scelta di u e ci si può limitare a considerare u tale che $u_1 = 0$ e $\sum_i u_i = 0$.

Si scelga come circuito $1 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 1$ e quindi costi $\bar{c}_{15} = 5$, $\bar{c}_{35} = 6$, $\bar{c}_{23} = 6$, $\bar{c}_{12} = 7$, $\bar{c}_{24} = 7$, $\bar{c}_{34} = 10$, $\bar{c}_{46} = 10$, $\bar{c}_{56} = 12$, $\bar{c}_{16} = 13$. Questi valori definiscono il circuito come albero di supporto. Gli altri valori possono essere scelti arbitrariamente, purché superiori a quelli già indicati:

$$\bar{c} = \begin{array}{cccccc} * & 7 & 15 & 15 & 5 & 13 \\ 7 & * & 6 & 7 & 16 & 20 \\ 15 & 6 & * & 10 & 6 & 22 \\ 15 & 7 & 10 & * & 24 & 10 \\ 5 & 16 & 6 & 24 & * & 12 \\ 13 & 20 & 22 & 10 & 12 & * \end{array} \quad c = \begin{array}{cccccc} * & 17 & 20 & 3 & -1 & 16 \\ 17 & * & 21 & 5 & 20 & 33 \\ 20 & 21 & * & 3 & 5 & 30 \\ 3 & 5 & 3 & * & 6 & 1 \\ -1 & 20 & 5 & 6 & * & 9 \\ 16 & 33 & 30 & 1 & 9 & * \end{array}$$

$$c = \begin{array}{cccccc} * & 19 & 22 & 5 & 1 & 18 \\ 19 & * & 23 & 7 & 22 & 35 \\ 22 & 23 & * & 5 & 7 & 32 \\ 5 & 7 & 5 & * & 8 & 3 \\ 1 & 22 & 7 & 8 & * & 11 \\ 18 & 35 & 32 & 3 & 11 & * \end{array}$$