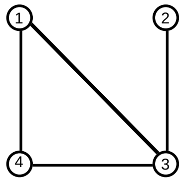
5.21 Esercizio. Si risolva come nell'esempio precedente la seguente istanza di TSP (basta un'iterazione e vale la dualità forte):

$$\begin{bmatrix} 0 & 64 & 20 & 36 \\ 64 & 0 & 47 & 49 \\ 20 & 47 & 0 & 27 \\ 36 & 49 & 27 & 0 \end{bmatrix}$$

Soluzione. Per $u := 0$ si ha $L(0) = 130$ con il seguente (unico) $x \in X(0)$:



x^1

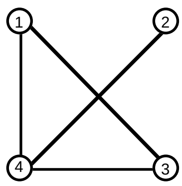
Il gradiente vale $h = \{0, 1, -1, 0\}$. Muovendosi in direzione h si considerino i punti $\alpha\, h = \{0, \alpha, -\alpha, 0\}$. I costi vengono modificati in

$$\begin{bmatrix} 0 & 64-\alpha & 20+\alpha & 36 \\ 64-\alpha & 0 & 47 & 49-\alpha \\ 20+\alpha & 47 & 0 & 27+\alpha \\ 36 & 49-\alpha & 27+\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

La funzione $\alpha \mapsto L(\alpha, h) = \min_{x \in X} f(x) + \alpha, h\, g(x) = f(\bar{x}) + \alpha, h\, g(\bar{x})$ ha derivata $h\, g(\bar{x}) = h\, h = 2$ Il primo valore di α per cui si ha un punto di rottura si ottiene ponendo $47 = 49 - \alpha$, cioè $\alpha = 2$. Allora si hanno i costi:

$$\begin{bmatrix} 0 & 62 & 22 & 36 \\ 62 & 0 & 47 & 47 \\ 22 & 47 & 0 & 29 \\ 36 & 47 & 29 & 0 \end{bmatrix}$$

Per $u = \{0, 2, -2, 0\}$ si ottiene, oltre alla soluzione precedente x^1, la seguente soluzione

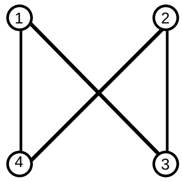


x^2

di valore $L(\{0, 2, -2, 0\}) = 134$. La derivata per α appena superiore a 2 è data da $h\, g(\bar{x}) = \{0, 1, -1, 0\}\, \{0, 1, 0, -1\} = 1$. Quindi il punto $\alpha = 2$ non è il massimo. Il successivo punto di rottura si ottiene per il minimo valore di α per cui $20 + \alpha = 64 - \alpha$ oppure $64 - \alpha = 36$ oppure $27 + \alpha = 47$, cioè $\alpha = 22$ oppure $\alpha = 28$ oppure $\alpha = 20$. Per $\alpha = 20$ si hanno i costi

$$\begin{bmatrix} 0 & 44 & 40 & 36 \\ 44 & 0 & 47 & 29 \\ 40 & 47 & 0 & 47 \\ 36 & 29 & 47 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi per $u = \{0, 20, -20, 0\}$ si ha, oltre a x^2



che è ovviamente l'ottimo con valore 152. ∎