5.19 ESERCIZIO. Si risolva il duale del seguente problema

$$\begin{array}{llr}
\max & x_1 \quad\quad + 2\,x_3 + 3\,x_4 & \\
& 2\,x_1 + \ \ x_2 \quad\quad + \ \ x_4 \leq 5 & (g_1) \\
& \quad\quad 2\,x_2 + \ \ x_3 + 2\,x_4 \leq 2 & (g_2) \\
& 0 \leq x_1 \leq 2,\ 1 \leq x_2 \leq 3,\ 0 \leq x_3 \leq 2,\ 0 \leq x_4 \leq 1,\ x_i \text{ intero} & X
\end{array}$$

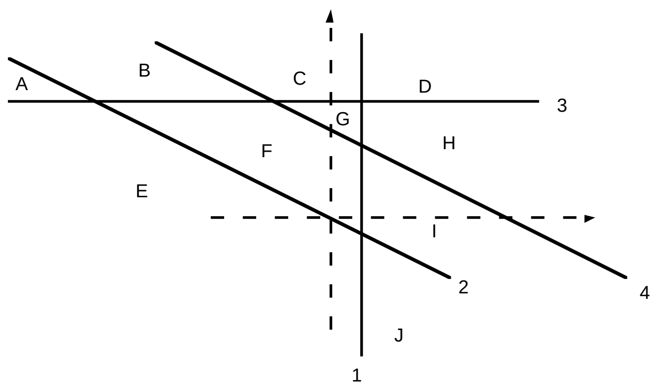
ponendo come vincolo esplicito g_1 e g_2, oppure solo g_1, oppure solo g_2. Si studino le relazioni fra i tre duali.

SOLUZIONE.

Vincolo esplicito g_1 e g_2:

$$L(u_1, u_2) = -5\,u_1 - 2\,u_2 + \min_{x_1 \in \{0,1,2\}} (2\,u_1 - 1)\,x_1 + \min_{x_2 \in \{1,2,3\}} (u_1 + 2\,u_2)\,x_2 +$$

$$\min_{x_3 \in \{0,1,2\}} (u_2 - 2)\,x_3 + \min_{x_4 \in \{0,1\}} (u_1 + 2\,u_2 - 3)\,x_4$$



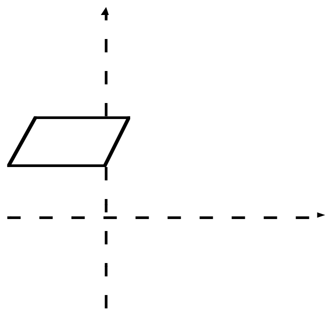
Uguagliando a 0 i coefficienti di x_i nell'espressione di $L(u_1, u_2)$ si ottengono quattro rette nel piano (u_1, u_2) che dividono il piano in 10 regioni dove la funzione è lineare. I valori ammissibili sono solo quelli non negativi. Quindi, se esiste l'ottimo, questo può essere cercato in uno dei due punti d'incontro non negativi delle rette oppure in uno dei 5 punti di incontro delle rette con gli assi coordinati. Quindi considerando ad esempio il punto d'intersezione della retta 1 con la retta 4:

$$2\,u_1 - 1 = u_1 + 2\,u_2 - 3 = 0 \Longrightarrow u_1 = \frac{1}{2},\ u_2 = \frac{5}{4}$$

$$X(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}) = \{\{0,1,2\}, 1, 2, \{0,1\}\}$$

$$\partial L(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}) = \text{conv}\left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

indicato in figura:



La direzione d'ascesa è in direzione della retta 1. Proviamo allora il punto intersezione della retta 1 con la retta 3.

$$u_1 - 1 = u_2 - 2 = 0 \Longrightarrow u_1 = \frac{1}{2},\ u_2 = 2$$

$$X(\frac{1}{2}, 2) = \{\{0,1,2\}, 1, \{0,1,2\}, 0\}$$

$$\partial L(\frac{1}{2}, 2) = \text{conv}\left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Quindi $0 \in \partial L$ e l'ottimo è raggiunto. Si vede che la soluzione

$$\hat{x} = \{2, 1, 0, 0\}$$

soddisfa le CGO ed è pertanto l'ottimo.

Vincolo esplicito g_1:

$$\begin{aligned} L(u_1) = -5\,u_1 + \min \quad & (2\,u_1 - 1)\,x_1 + u_1\,x_2 - 2\,x_3 + (u_1 - 3)\,x_4 \\ & 2\,x_2 + x_3 + 2\,x_4 \le 2 \\ & x_1 \in \{0,1,2\}, x_2 \in \{1,2,3\}, x_3 \in \{0,1,2\}, x_4 \in \{0,1\} \end{aligned}$$

Si noti che si deve avere $x_2 = 1$ e quindi $x_3 = x_4 = 0$. Allora si può riscrivere

$$\begin{aligned} L(u_1) = -5\,u_1 + \min \quad & (2\,u_1 - 1)\,x_1 + u_1 \\ & x_1 \in \{0,1,2\} \end{aligned}$$

Per $u_1 \le 1/2$ si ha $L(u_1) = -5\,u_1 + (2\,u_1 - 1)\,2 + u_1 = -2$. Per $u_1 \ge 1/2$ si ha $L(u_1) = -5\,u_1 + (2\,u_1 - 1)\,0 + u_1 = -4\,u_1$. Allora ottimi duali sono tutti i valori $\hat{u}_1 \in [0, 1/2]$.

In base alla CGO 1) si hanno i seguenti candidati all'ottimalità

$$(\hat{u}_1 \in [0, 1/2), \hat{x}^1 = \{2, 1, 0, 0\})$$

$$(\hat{u}_1 = 1/2, \hat{x}^1 = \{0, 1, 0, 0\}), \quad (\hat{u}_1 = 1/2, \hat{x}^1 = \{1, 1, 0, 0\}), \quad (\hat{u}_1 = 1/2, \hat{x}^1 = \{2, 1, 0, 0\})$$

Di questi solo $(\hat{u}_1 \in [0, 1/2], \hat{x}^1 = \{2, 1, 0, 0\})$ soddisfa anche le altre condizioni. Abbiamo pertanto un ottimo duale non unico.