5.18 ESERCIZIO. Si risolva il seguente problema

$$\begin{aligned}
\min \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\
& x_1 \qquad - x_3 \geq 1 \\
& \qquad x_2 + x_3 \geq 2 \\
& x_i \geq 0 \text{ intero}
\end{aligned}$$

ponendo come vincolo esplicito le due diseguaglianze, oppure una sola delle due (vale sempre la dualità forte).

SOLUZIONE. Primo caso, entrambe le diseguaglianze come vincolo esplicito:

$$L(u_1, u_2) = \min_{x_i \geq 0} x_1 + x_2 + x_3 + u_1 (1 - x_1 + x_3) + u_2 (2 - x_2 - x_3) =$$

$$u_1 + 2\, u_2 + \min_{x_1 \geq 0} (1 - u_1)\, x_1 + \min_{x_2 \geq 0} (1 - u_2)\, x_2 + \min_{x_3 \geq 0} (1 + u_1 - u_2)\, x_3$$

e il problema duale è

$$\begin{aligned}
\max \quad & u_1 + 2\, u_2 \\
& u_1 \qquad \leq 1 \\
& \qquad u_2 \leq 1 \\
& -u_1 + u_2 \leq 1 \\
& u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Il terzo vincolo è ridondante dato che è dominato da $u_2 \leq 1$. Quindi l'ottimo duale è $\hat{u}_1 = 1$, $\hat{u}_2 = 1$. La prima CGO fornisce $\hat{x}_3 = 0$. Per la complementarità si deve avere $\hat{x}_1 = 1$ e $\hat{x}_2 = 2$.

Secondo caso, un solo vincolo come esplicito:

$$L(u) = \min_{\substack{x_i \geq 0 \\ x_2 + x_3 \geq 2}} \quad x_1 + x_2 + x_3 + u\,(1 - x_1 + x_3)$$

L'insieme ammissibile è un poliedro con vertici $(0, 0, 2)$ e $(0, 2, 0)$ e direzioni estreme gli assi coordinati. Affinché $L(u) > -\infty$ basta che $u \leq 1$ (coefficiente di x_1 non negativo). Allora

$$L(u) = \min\ \{0 + 0 + 2 + u\,(1 - 0 + 2)\ ;\ 0 + 2 + 0 + u\,(1 - 0 + 0)\} =$$

$$\min\ \{2 + 3\,u\ ;\ 2 + u\} = 2 + u$$

Il massimo di $L(u)$ per $0 \leq u \leq 1$ si ottiene per $\hat{u} = 1$ e $L(\hat{u}) = 2$. La prima CGO fornisce $\hat{x}_2 = 2$ e $\hat{x}_3 = 0$. Per la complementarità $\hat{u} > 0$ implica $1 - x_1 + x_3 = 0$ e quindi $\hat{x} = 1$. ∎