5.17 Esercizio. Si risolva l'esempio precedente togliendo il vincolo d'interezza (sempre tramite il problema duale). ∎

Soluzione. Il problema è

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ & x_1 + 3\,x_2 - 2\,x_3 - 3\,x_4 = 50 \\ & 2\,x_1 - x_2 + x_3 - 2\,x_4 = 50 \\ & x_i \geq 0\,\forall i \end{aligned}$$

La funzione duale risulta essere:

$$\begin{aligned} L(u_1, u_2) = 50\,u_1 + 50\,u_2 &+ \inf_{x_1 \in \mathbb{R}_+} (1 - u_1 - 2\,u_2)\,x_1 + \inf_{x_2 \in \mathbb{R}_+} (1 - 3\,u_1 + u_2)\,x_2 \\ &+ \inf_{x_3 \in \mathbb{R}_+} (1 + 2\,u_1 - u_2)\,x_3 + \inf_{x_4 \in \mathbb{R}_+} (1 + 3\,u_1 + 2\,u_2)\,x_4 \end{aligned}$$

Anche in questo caso $L(u) \to -\infty$ se solo uno dei coefficienti di x_i è negativo, mentre se tale coefficiente è positivo l'infimo viene realizzato per $x_i = 0$. Allora il problema duale è il medesimo dell'esempio precedente

$$\begin{aligned} \max \quad & 50\,u_1 + 50\,u_2 \\ & u_1 + 2\,u_2 \leq 1 \\ & 3\,u_1 - u_2 \leq 1 \\ & -2\,u_1 + u_2 \leq 1 \\ & -3\,u_1 - 2\,u_2 \leq 1 \end{aligned}$$

con ottimo $\hat{u} = (\frac{3}{7}, \frac{2}{7})$ e valore ottimo $L(\hat{u}) = 250/7$. Da questo punto i due problemi divergono. Verifichiamo le CGO:

$$X(\hat{u}) = \{x \in \mathbb{R}^4_+ : x_3 = 0,\, x_4 = 0\}$$

Quindi dobbiamo verificare se esistono soluzioni non negative (non necessariamente intere!) del sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 3\,x_2 &= 50 \\ 2\,x_1 - x_2 &= 50 \end{aligned}$$

le cui soluzioni sono

$$\hat{x}_1 = \frac{200}{7} \geq 0, \qquad \hat{x}_2 = \frac{50}{7} \geq 0$$

Le CGO sono soddisfatte e l'ottimo primale è quindi

$$\hat{x} = \left\{ \frac{200}{7}\,,\ \frac{50}{7}\,,\ 0\,,\ 0 \right\}$$

con valore ottimo

$$\frac{200}{7} + \frac{50}{7} + 0 + 0 = \frac{250}{7}$$

∎