5.12 Esercizio. Riformulare la funzione Lagrangiana, il problema duale e le condizioni di ottimalità per un problema formulato come max $f(x)$ con il vincolo $g(x) \geq 0$, $x \in X$.

Soluzione. Il problema dato venga dapprima posto nella forma nota. Quindi

$$\begin{aligned} v = \max\, & f(x) \\ & g(x) \geq 0 \\ & x \in X \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} -v = \min\, & -f(x) \\ & -g(x) \leq 0 \\ & x \in X \end{aligned}$$

Allora

$$L(x,u) = -f(x) - u\, g(x) \qquad L(u) = \inf_{x \in X} -f(x) - u\, g(x) = -\sup_{x \in X} f(x) + u\, g(x)$$

Sia $\hat{L}(u) = -L(u)$ e $\hat{L}(x,u) = -L(x,u)$. Allora

$$\hat{L}(u) = \sup_{x \in X} f(x) + u\, g(x)$$

Quindi $\sup_{u \geq 0} L(u) = \sup_{u \geq 0} -\hat{L}(u) = -\inf_{u \geq 0} \hat{L}(u)$. Definendo $-d = \sup_{u \geq 0} L(u)$ si ha $d = \inf_{u \geq 0} \hat{L}(u)$ (problema duale) e da $-v \geq -d$ si ha $v \leq d$ (dualità debole). Le CGO diventano semplicemente: 1) $\hat{L}(\hat{x}, \hat{u}) = \hat{L}(\hat{u})$; 2) $\hat{u}\, g(\hat{x}) = 0$; 3) $g(\hat{x}) \geq 0$. ∎