(leggermente modificato rispetto al testo)

4.102 Esercizio. Dalle proprietà della norma, ogni insieme $\{x : ||x|| \leq \alpha\}$ è un corpo convesso contenente l'origine nel proprio interno. Tuttavia è interessante vedere che a sua volta ogni corpo convesso contenente l'origine nel proprio interno può definire una norma. Sia dunque K un corpo convesso limitato contenente l'origine nel proprio interno e si definisca la seguente funzione (detta *funzionale di Minkowski*)

$$K(x) := \inf\{\alpha \geq 0 : x \in \alpha\, K\}$$

Dimostrare che $K(x)$ è convessa e soddisfa le proprietà della norma se inoltre K è simmetrico, ovvero $x \in K \iff -x \in K$.

Soluzione. Dimostriamo prima le tre proprietà della norma, cioè

$$\|x\| = 0 \iff x = 0; \qquad \|\alpha\, x\| = |\alpha| \cdot \|x\|; \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Da $\mathbf{0} \in K$ segue $\mathbf{0} \in \alpha\, K$ per ogni $\alpha \geq 0$. Quindi $K(\mathbf{0}) = 0$. Se $x \neq \mathbf{0}$ si consideri il raggio $\alpha\, x$. Essendo K limitato esiste $\bar{\alpha}$ tale che $\alpha\, x \notin K$, per ogni $\alpha \geq \bar{\alpha}$, cioè $x \notin (1/\alpha)\, K$ per ogni $\alpha \geq \bar{\alpha}$, da cui $K(x) \geq (1/\bar{\alpha}) > 0$.

Inoltre, sia $\alpha > 0$,

$$K(\alpha\, x) = \inf\{\beta \geq 0 : \alpha\, x \in \beta\, K\} = \inf\{\beta \geq 0 : x \in (\beta/\alpha)\, K\} =$$

$$\inf\{\gamma\, \alpha \geq 0 : x \in \gamma\, K\} = \alpha \inf\{\gamma \geq 0 : x \in \gamma\, K\} = \alpha\, K(x)$$

Sia $\alpha < 0$,

$$K(\alpha\, x) = K((-\alpha)(-x)) = -\alpha\, K(-x) = -\alpha\, K(x)$$

dove l'ultima uguaglianza è valida per l'ipotesi di simmetria.

Siano $\alpha \geq 0$ e $\beta \geq 0$ tali che $x \in \alpha\, K$ e $y \in \beta\, K$. Dal Teorema 4.31, $\alpha\, K + \beta\, K = (\alpha + \beta)\, K$. Quindi per definizione $x + y \in (\alpha + \beta)\, K$. Allora, per ogni $\alpha \geq 0$ e $\beta \geq 0$ tali che $x \in \alpha\, K$ e $y \in \beta\, K$ si ha $K(x + y) \leq \alpha + \beta$. Essendo vera la relazione per ogni α e β è vera anche peri rispettivi inf da cui $K(x + y) \leq K(x) + K(y)$.

Per la convessità si ha

$$K(\alpha\, x + \beta\, y) \leq K(\alpha\, x) + K(\beta\, y) = \alpha\, K(x) + \beta\, K(y)$$

per ogni $\alpha \geq 0$ e $\beta \geq 0$, in base ai precedenti risultati e in particolare per $\beta = (1 - \alpha)$. ∎