4.94 Esercizio. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e $X \subset \mathbb{R}^n$ un insieme finito di punti. Si consideri la funzione:

$$\tilde{f} : \mathrm{epi}(\tilde{f}) = \mathrm{conv}\{(x, f(x) + R^+)\}_{x\in X}$$

Dimostrare che

$$\begin{aligned} \tilde{f}(y) = \min \quad & \sum_{x\in X} \alpha_x f(x) \\ & \sum_{x\in X} \alpha_x\, x = y \\ & \sum_{x\in X} \alpha_x = 1 \\ & \alpha_x \geq 0 \quad \forall x \in X \end{aligned} \tag{1}$$

per qualsiasi $y \in \mathbb{R}^n$. Dimostrare inoltre, sfruttando la convessità di f che $\tilde{f}(x) = f(x)$ per qualsiasi $x \in X$. Far quindi vedere che $\min_{x\in X} f(x) = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x)$. ∎

Soluzione. Per ogni combinazione convessa α_x e per ogni $z_x \geq 0$ si ha della definizione

$$\sum_{x\in X} \alpha_x\,(x\,,\, f(x) + z_x) \in \mathrm{epi}\,\tilde{f}$$

Sia $y \in \mathrm{conv}_{x\in X}\, x$. Allora $\tilde{f}(y) = \inf \sum_{x\in X} \alpha_x\,(f(x) + z_x)$ dove l'inf va calcolato su tutti i valori $z_x \geq 0$ e tutti i possibili coefficienti di combinazione convessa tali che $y = \sum_{x\in X} \alpha_x\, x$ da cui (1).

Dalla convessità di f si ha

$$y = \sum_{x\in X} \alpha_x\, x \quad \Longrightarrow \quad f(y) \leq \sum_{x\in X} \alpha_x\, f(x)$$

Quindi se $y = x'$ per qualche $x' \in X$, la soluzione ammissibile $\alpha_{x'} = 1$, $\alpha_x = 0$, $x \neq x'$ ha valore dell'obiettivo $f(x') = f(y)$ e deve essere ottima dalla precedente diseguaglianza.

Se esiste y tale che $\tilde{f}(y) < f(x)$ per ogni $x \in X$, sia α_x la soluzione in (1). Quindi

$$\sum_{x\in X} \alpha_x\, f(x) = \tilde{f}(y) < \sum_{x\in X} \alpha_x f(x)$$

dove la diseguaglianza è stata ottenuta da $\tilde{f}(y) < f(x)$ moltiplicando per α_x e sommando. Dalla contraddizione segue la tesi. ∎