4.93 Esercizio. È convessa la seguente funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$?:

$$f(x,y) := \begin{cases} +\infty & \text{se } x^2+y^2>1 \\ -\infty & \text{se } x^2+y^2<1 \\ \text{valori arbitrari} & \text{se } x^2+y^2=1 \end{cases}$$

∎

Soluzione. L'epigrafo di f è dato da

$$\{(x,y,z) : (x^2+y^2<1) \vee (x^2+y^2=1 \wedge z \geq f(x,y))\}$$

si considerino due punti arbitrari dell'epigrafo, siano (x_1,y_1,z_1) e (x_2,y_2,z_2) e una loro combinazione convessa

$$(\alpha\, x_1+(1-\alpha)\, x_2, \alpha\, y_1+(1-\alpha)\, y_2, \alpha\, z_1+(1-\alpha)\, z_2)$$

Preliminarmente dimostriamo che per ogni a e b reale e $0 \leq \alpha \leq 1$ vale

$$(\alpha\, a+(1-\alpha)\, b)^2 \leq \alpha\, a^2+(1-\alpha)\, b^2$$

e che se $a \neq b$ e $0<\alpha<1$

$$(\alpha\, a+(1-\alpha)\, b)^2 < \alpha\, a^2+(1-\alpha)\, b^2$$

Infatti

$$(\alpha\, a+(1-\alpha)\, b)^2 = \alpha^2\, a^2+(1-\alpha)^2\, b^2+2\,\alpha\,(1-\alpha)\, a\, b =$$
$$\alpha^2\, a^2+(1-\alpha)^2\, b^2+2\,\alpha\,(1-\alpha)\, a\, b-\alpha\, a^2-(1-\alpha)\, b^2+\alpha\, a^2+(1-\alpha)\, b^2 =$$
$$\alpha\,(\alpha-1)\, a^2+(1-\alpha)(-\alpha)\, b^2+2\,\alpha\,(1-\alpha)\, a\, b+\alpha\, a^2+(1-\alpha)\, b^2 =$$
$$-\alpha\,(1-\alpha)\,(a^2+b^2-2\, a\, b) = -\alpha\,(1-\alpha)\,(a-b)^2+\alpha\, a^2+(1-\alpha)\, b^2 \leq \alpha\, a^2+(1-\alpha)\, b^2$$

Consideriamo adesso separatamente i tre casi (due sono simmetrici):

$$(x_1,y_1,z_1) : x_1^2+y_1^2<1, \qquad (x_2,y_2,z_2) : x_2^2+y_2^2<1, \qquad \Longrightarrow$$

$$(\alpha\, x_1+(1-\alpha)\, x_2)^2+(\alpha\, y_1+(1-\alpha)\, y_2)^2 \leq \alpha\, x_1^2+(1-\alpha)\, x_2^2+\alpha\, y_1^2+(1-\alpha)\, y_2^2 < \alpha+(1-\alpha)=1$$

$$(x_1,y_1,z_1) : x_1^2+y_1^2<1, \qquad (x_2,y_2,z_2) : x_2^2+y_2^2=1 \wedge z_2 \geq f(x_2,y_2), \qquad \Longrightarrow$$

$$(\alpha\, x_1+(1-\alpha)\, x_2)^2+(\alpha\, y_1+(1-\alpha)\, y_2)^2 \leq \alpha\, x_1^2+(1-\alpha)\, x_2^2+\alpha\, y_1^2+(1-\alpha)\, y_2^2 < \alpha+(1-\alpha)=1$$

Essendo $(\alpha\, x_1+(1-\alpha)\, x_2)^2+(\alpha\, y_1+(1-\alpha)\, y_2)^2<1$ il valore di $\alpha\, z_1+(1-\alpha)\, z_2$ è irrilevante.

$$(x_1,y_1,z_1) : x_1^2+y_1^2=1 \wedge z_1 \geq f(x_1,y_1), \quad (x_2,y_2,z_2) : x_2^2+y_2^2=1 \wedge z_2 \geq f(x_2,y_2), \quad \Longrightarrow$$

Anche in questo caso, per $0<\alpha<1$ si ha

$$(\alpha\, x_1+(1-\alpha)\, x_2)^2+(\alpha\, y_1+(1-\alpha)\, y_2)^2 < \alpha\, x_1^2+(1-\alpha)\, x_2^2+\alpha\, y_1^2+(1-\alpha)\, y_2^2 = \alpha+(1-\alpha)=1$$

e quindi il valore di $\alpha\, z_1+(1-\alpha)\, z_2$ è irrilevante.

La funzione è pertanto convessa.

∎