4.91 Esercizio. Sia dato il poliedro $P := \{x \in \mathbb{R}^n : A\,x \leq b\}$ e si voglia trovare la rappresentazione in $\mathbb{R}^n$ del poliedro P_H proiezione di P sul sottospazio $\{x \in \mathbb{R}^n : H\,x = 0\}$. Si osservi che $x \in P_H$ se e solo se esiste una combinazione lineare delle righe di H, cioè $H^T\,y$, per cui si abbia $x + H^T\,y \in P$. A questo punto si possono applicare i risultati precedenti.

∎

Soluzione. Da $x \in P_H$ se e solo se $x + H^T\,y \in P$ e $H\,x = 0$ si ha $x \in P_H$ se e solo se

$$A\,(x + H^T\,y) \leq b,\ H\,x = 0 \quad \Longrightarrow \quad A\,x + A\,H^T\,y \leq b,\ H\,x = 0$$

o anche

$$\begin{aligned} A\,x + A\,H^T\,y &\leq b \\ H\,x \qquad\qquad &= 0 \end{aligned}$$

Quindi si tratta di trovare i generatori di

$$u\,A\,H^T + v\,\mathbf{0} = 0, \quad u \geq 0 \tag{1}$$

(v svincolato perché è associato a vincoli di eguaglianza) Il cono (1) non è puntato, in quanto contiene il sottospazio generato dalle variabili v. Può comunque essere rappresentato dai generatori di

$$u\,A\,H^T = 0, \quad u \geq 0 \tag{2}$$

più una combinazione lineare dei versori delle variabili v. Sia u^j un generatore di (2). Allora una diseguaglianza di P_H è data da

$$(u^j\,A + v\,H)\,x \leq u^j\,b$$

Si noti che si ottiene, ponendo $u = 0$, il vincolo $v\,H\,x \leq 0$, da cui $H\,x = 0$ per l'arbitrarietà di v. Per gli altri vincoli si può imporre la condizione che i piani delle diseguaglianze siano ortogonali al sottospazio $\{x \in \mathbb{R}^n : H\,x = 0\}$, ovvero

$$(u^j\,A + v\,H)\,H^T = 0 \quad \Longrightarrow \quad u^j\,A\,H^T + v\,H\,H^T = 0 \quad \Longrightarrow \quad v\,H\,H^T = 0 \quad \Longrightarrow \quad v = 0$$

Quindi in conclusione P_H è rappresentato da

$$H\,x = 0, \qquad u^j\,A\,x \leq u^j\,b \quad j := 1, \ldots, p$$

Esempio:

$$P = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 1,\ x_1 + 2\,x_2 \leq 4\right\} \qquad\qquad H = \{1 \quad -1\}$$

Quindi

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad A\,H^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

I generatori quindi si trovano risolvendo

$$-u_1 + u_2 - u_3 = 0, \quad u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0, \quad u_3 \geq 0$$

quindi

$$u^1 = (\,1 \quad 1 \quad 0\,), \quad u^2 = (\,0 \quad 1 \quad 1\,)$$

e le diseguaglianze sono

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 2 \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$