4.80 Esercizio. Siano A e B due poliedri e sia $C = A + B$. Si dimostri:
- che C è un poliedro;
- che ogni vertice di C è ottenuto soltanto come somma di un vertice di A e di un vertice di B;
- che vertici $\hat{x} \in A$ e $\hat{y} \in B$ generano un vertice $\hat{z} = \hat{x} + \hat{y} \in C$ se e solo se esiste una funzione lineare, per la quale $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ sono minimi stretti nei rispettivi poliedri.

Soluzione. Essendo A e B poliedri ogni $a \in A$ e ogni $b \in B$ possono essere espressi come

$$a = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \, \hat{a}^i + \sum_{h=1}^{r} \eta_h \, \bar{a}^h, \qquad b = \sum_{j=1}^{p} \beta_j \, \hat{b}^j + \sum_{k=1}^{s} \mu_k \, \bar{b}^k$$

con $\hat{a}^i$ e $\hat{b}^j$ vertici, $\bar{a}^h$ e $\bar{b}^k$ direzioni estreme, α_i e β_j coefficienti di combinazione convessa e η_h e μ_k coefficienti di combinazione conica.

Quindi ogni punto $c \in C$ (per definizione di somma algebrica) si può rappresentare come:

$$c = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \, \hat{a}^i + \sum_{h=1}^{r} \eta_h \, \bar{a}^h + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \, \hat{b}^j + \sum_{k=1}^{s} \mu_k \, \bar{b}^k$$

Siccome $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i = \sum_{j=1}^{p} \beta_j = 1$ si ha

$$c = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} \beta_j \, \alpha_i \, \hat{a}^i + \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \, \beta_j \, \hat{b}^j + \sum_{h=1}^{r} \eta_h \, \bar{a}^h + \sum_{k=1}^{s} \mu_k \, \bar{b}^k$$

cioè

$$c = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} \beta_j \, \alpha_i \, (\hat{a}^i + \hat{b}^j) + \sum_{h=1}^{r} \eta_h \, \bar{a}^h + \sum_{k=1}^{s} \mu_k \, \bar{b}^k$$

Si noti che i valori $\{\beta_j \, \alpha_i\}_{i,j}$ sono coefficienti di combinazione convessa e che $\bar{a}^h$ e $\bar{b}^k$ sono anche direzioni di C. Quindi si è ottenuto che ogni $c \in C$ si può rappresentare come combinazione convessa di un numero finito di punti di C e combinazione conica di un numero finito di direzioni di C e quindi C è un poliedro.

Necessariamente i vertici di C vanno cercati fra i punti $(\hat{a}^i + \hat{b}^j)$ (questi non sono necessariamente tutti vertici però) e quindi anche la seconda tesi è dimostrata.

Si può anche dimostrare che la decomposizione di un vertice $\hat{z} \in C$ in somma di due vertici $\hat{x} \in A$ e $\hat{y} \in B$ è unica. Infatti sia

$$\hat{z} = \hat{x}^1 + \hat{y}^1, \qquad \hat{z} = \hat{x}^2 + \hat{y}^2$$

Allora

$$\hat{z} = \frac{1}{2}\,(\hat{x}^1 + \hat{y}^1) + \frac{1}{2}\,(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) = \frac{1}{2}\,(\hat{x}^1 + \hat{y}^2) + \frac{1}{2}\,(\hat{x}^2 + \hat{y}^1)$$

Per definizione di vertice, siccome $\hat{x}^1 + \hat{y}^2 \in C$ e $\hat{x}^2 + \hat{y}^1 \in C$ deve essere

$$\hat{z} = \hat{x}^1 + \hat{y}^2, \qquad \hat{z} = \hat{x}^2 + \hat{y}^1$$

da cui $\hat{x}^1 = \hat{x}^2$ e $\hat{y}^1 = \hat{y}^2$.

Sia $\hat{z} \in C$ vertice. Allora esiste una funzione lineare $a\,z$ per cui $\hat{z}$ è minimo. Cioè

$$a\,\hat{z} \le a\,z, \quad z \in C \quad \Longrightarrow \quad a\,\hat{z} \le a\,x + a\,y, \quad x \in A, y \in B$$

Siano $\hat{x} \in A$ e $\hat{y} \in B$ i due vertici unici tali che $\hat{z} = \hat{x} + \hat{y}$. Quindi

$$a\,\hat{x} + a\,\hat{y} \leq a\,x + a\,y, \quad x \in A, y \in B$$

e in particolare (prendendo una volta $x := \hat{x}$ e un'altra $y := \hat{y}$)

$$a\,\hat{y} \leq a\,y, \quad y \in B, \qquad a\,\hat{x} \leq a\,x, \quad x \in A$$

cioè $\hat{x}$ e $\hat{y}$ sono minimi rispetto alla funzione a.

Si supponga ora che esista una funzione lineare per cui $\hat{x} \in A$ e $\hat{y} \in B$ sono minimi stretti nei rispettivi poliedri, cioè

$$a\,\hat{x} < a\,x \quad x \neq \hat{x}, \quad a\,\hat{y} < a\,y \quad y \neq \hat{y} \quad \Longrightarrow \quad a\,(\hat{x} + \hat{y}) < a\,(x + y), \quad (x, y) \neq (\hat{x}, \hat{y})$$

Quindi anche $\hat{z} := \hat{x} + \hat{y}$ è minimo stretto su C e quindi è un vertice.

L'ipotesi di minimo stretto (anziché semplicemente minimo) non può essere tralasciata. Infatti se si prendono due vertici per i quali l'unica funzione che li rende entrambi minimi è la funzione nulla, si vede anche che la somma di tali vertici non è un vertice.