

4.60 ESERCIZIO. Dimostrare che le direzioni di un insieme convesso formano un cono convesso.

SOLUZIONE. Per definizione di direzione d , $x + \alpha d \in K$ per ogni $\alpha \geq 0$ e $x \in K$. Ovviamente anche $x + \alpha(\beta d) \in K$ con $\beta \geq 0$, quindi le direzioni formano un cono. Siano d^1 e d^2 due direzioni, cioè $x + \beta_1 d^1 \in K, \forall \beta_1 \geq 0$, e $x + \beta_2 d^2 \in K, \forall \beta_2 \geq 0$. Prendendo la combinazione convessa si ha

$$\alpha(x + \beta_1 d^1) + (1 - \alpha)(x + \beta_2 d^2) = x + \alpha \beta_1 d^1 + (1 - \alpha) \beta_2 d^2 \in K \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \beta_1 \geq 0, \beta_2 \geq 0$$

Scegliendo i valori in modo che

$$\alpha \beta_1 = (1 - \alpha) \beta_2$$

si ha

$$x + \alpha \beta_1 (d^1 + d^2) \in K \quad \beta_1 \geq 0$$

e quindi anche $d^1 + d^2$ è una direzione. ■