4.46 ESERCIZIO. Dimostrare che, dato un insieme convesso K e un punto $\bar{x} \in \partial K$, l'insieme

$$\{a \in \mathbb{R}^n : a\, x = a\, \bar{x} \text{ è un piano di supporto a } K\}$$

è un cono convesso e chiuso. Che relazione c'è fra questo cono e $D(K, \bar{x})$?

SOLUZIONE. Per ogni a dell'insieme si ha $a\, \bar{x} \le a\, x$, $\forall x \in K$. Certamente anche $\alpha\, a$, $\alpha \ge 0$ appartiene all'insieme. Quindi si tratta di un cono. Che il cono sia convesso si verifica notando che dati a^1 e a^2 nell'insieme, si ha immediatamente

$$(a^1 + a^2)\, \bar{x} \le (a^1 + a^2)\, x \quad \forall x \in K$$

sommando $a^1\, \bar{x} \le a^1\, x$, $\forall x \in K$, e $a^2\, \bar{x} \le a^2\, x$, $\forall x \in K$. Si indichi con C tale insieme. Allora

$$a\,(x - \bar{x}) \ge 0 \quad \forall a \in C,\ \forall x \in K$$

Se $h \in D(K, \bar{x})$ allora $\bar{x} + \varepsilon\, h \in K$, quindi

$$a\, h \ge 0 \quad \forall a \in C,\ \forall h \in D(K, \bar{x})$$

∎