4.25 Esercizio. Verificare che due punti distinti sono sempre indipendenti in modo affine, mentre tre punti sono indipendenti in modo affine se e solo se non sono allineati.

Soluzione. Se due punti sono distinti $\operatorname{aff}\{x_1, x_2\}$ è la retta che li congiunge. Quindi $\dim \operatorname{aff}\{x_1, x_2\} = 1$ e per definizione i punti sono indipendenti in modo affine.

Se i punti sono tre (e distinti) si ha $\dim \operatorname{aff}\{x_1, x_2, x_3\} = 1$ se i punti sono allineati, altrimenti $\dim \operatorname{aff}\{x_1, x_2, x_3\} = 2$. ∎

4.26 Esercizio. Dimostrare che $\{x_1, \ldots, x_{m+1}\}$ sono indipendenti in modo affine se e solo se $x_1 - x_{m+1}, \ldots, x_m - x_{m+1}$ sono linearmente indipendenti.

Soluzione. Siano $x_1 - x_{m+1}, \ldots, x_m - x_{m+1}$ linearmente dipendenti. Allora il sottospazio S generato da questi elementi ha dimensione minore di m. L'affine $\operatorname{aff}\{x_1, \ldots, x_{m+1}\}$ ha per costruzione la stessa dimensione di S. Dalla contraddizione $x_1 - x_{m+1}, \ldots, x_m - x_{m+1}$ sono linearmente indipendenti.

Se invece $x_1 - x_{m+1}, \ldots, x_m - x_{m+1}$ sono linearmente indipendenti, il sottospazio S generato da questi elementi ha dimensione uguale a m e quindi per definizione anche $\dim\{x_1, \ldots, x_{m+1}\} = m$. ∎

4.27 Esercizio. Dimostrare che $\{x_1, \ldots, x_{m+1}\}$ sono indipendenti in modo affine se e solo se nessuno di essi può essere espresso come combinazione affine degli altri. ∎

Soluzione. Sia

$$x_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, x_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$$

Allora anche

$$x_{m+1} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, x_i$$

da cui

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, (x_i - x_{m+1}) = 0$$

Siccome $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$, gli α_i non sono tutti nulli e quindi $x_1 - x_{m+1}, \ldots, x_m - x_{m+1}$ sono linearmente dipendenti. Dal teorema precedente $\{x_1, \ldots, x_{m+1}\}$ sono dipendenti in modo affine.

Se invece $\{x_1, \ldots, x_{m+1}\}$ sono indipendenti in modo affine, dal teorema precedente $x_1 - x_{m+1}, \ldots, x_m - x_{m+1}$ sono linearmente indipendenti e quindi se $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, (x_i - x_{m+1}) = 0$ allora $\alpha_i = 0$, $\forall i$, quindi è impossibile che $x_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, x_i$, con $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$. ∎

4.28 Esercizio. Un insieme $\{x_1, \ldots, x_{m+1}\}$ è dipendente in modo affine se e solo se esistono $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}$ non tutti nulli e tali che $\sum \alpha_i = 0$, per cui si abbia $\sum \alpha_i \, x_i = 0$.

Soluzione. Se $\{x_1, \ldots, x_{m+1}\}$ è dipendente in modo affine, dal teorema precedente $x_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, x_i$ con $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$ e vale ovviamente la tesi. Se invece esistono coefficienti $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}$ non tutti nulli e tali che $\sum \alpha_i = 0$, per cui si abbia $\sum \alpha_i \, x_i = 0$ allora si definisca $\alpha'_i := -\alpha_i/\alpha_{m+1}$ (supponendo per semplicità di notazione che l'elemento non nullo sia α_{m+1}). Allora si ha

$$\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\alpha_i}{\alpha_{m+1}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha'_i = 1$$

e anche

$$\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i \, x_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m+1} \frac{\alpha_i}{\alpha_{m+1}} \, x_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} \alpha'_i \, x_i$$

∎

4.29 Esercizio. Verificare che i punti di un insieme affine si possono rappresentare come unica combinazione affine di un insieme indipendente in modo affine.

Soluzione. Sia $\{x_1, \ldots, x_{m+1}\}$ indipendente in modo affine e sia

$$x = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i \, x_i = \sum_{i=1}^{m+1} \beta_i \, x_i$$

con $\sum \alpha_i = 1$ e $\sum \beta_i = 1$. Allora

$$\sum_{i=1}^{m+1} (\beta_i - \alpha_i) \, x_i = 0 \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{m+1} (\beta_i - \alpha_i) = 0$$

Per l'ipotesi di indipendenza affine $\beta_i - \alpha_i = 0$, $\forall i$, e quindi la combinazione è unica. ∎