4.10 Esercizio. Siano dati $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$. Si dimostri che

$$\operatorname{aff}\{x_1, \dots, x_m\} = x_1 + \operatorname{lin}\{x_2 - x_1, \dots, x_m - x_1\}$$

Soluzione. Sia A un affine tale che $\{x_1, \dots, x_m\} \subset A$. Allora $S := A - \{x_1\}$ è il sottospazio generatore di A e $\{x_2 - x_1, \dots, x_m - x_1\} \subset S$.

Viceversa sia S un sottospazio lineare tale che $\{x_2 - x_1, \dots, x_m - x_1\} \subset S$. Allora $A := \{x_1\} + S$ è un affine tale che $\{x_1, \dots, x_m\} \subset A$.

Quindi esiste una corrispondenza biunivoca fra affini A tali $\{x_1, \dots, x_m\} \subset A$ e sottospazi S tali che $\{x_2 - x_1, \dots, x_m - x_1\} \subset S$, data da $A = \{x_1\} + S$. ∎