

4.3 ESERCIZIO. Verificare che un cono è anche convesso se  $\forall x_1, x_2 \in C$  vale  $x_1 + x_2 \in C$ .

SOLUZIONE. Siano  $y_1 \in C$  e  $y_2 \in C$ . Si consideri  $\alpha y_1 + (1 - \alpha) y_2$ . Siccome  $C$  è un cono, si ha  $x_1 := \alpha y_1 \in C$  e  $x_2 := (1 - \alpha) y_2 \in C$ . Siccome per ipotesi  $x_1 + x_2 \in C$ , si ha  $\alpha y_1 + (1 - \alpha) y_2 \in C$ , e cioè la convessità. ■

La condizione è anche necessaria. Dati  $x_1 \in C$  e  $x_2 \in C$  anche  $2x_1 \in C$  e  $2x_2 \in C$  (perché è per ipotesi un cono), e per convessità

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{2} 2x_1 + \frac{1}{2} 2x_2 \in C$$