3.55 Esercizio. Si trasformi partizione in K insiemi minimi.

Soluzione. (notazione: si indichi $a(J) := \sum_{j \in J} a_j$ e sia $\bar{J}$ il complementare di J)

Il problema dei K insiemi minimi è: dati m interi non negativi $a'_1, a'_2, \ldots a'_m$ e due interi non negativi K e B', esistono almeno K sottoinsiemi distinti (non necessariamente disgiunti) $J_1, J_2, \ldots, J_K$ di $\{1, 2, \ldots, m\}$ tali che $a'(J_j) \le B'$ per ogni $j = 1, \ldots, K$?

Il problema della partizione è: dati n interi non negativi $a_1, a_2, \ldots a_n$, (con $B := \sum_{i=1}^n a_i/2$) esiste un sottoinsieme J di $\{1, 2, \ldots, n\}$ tale che $a(J) = a(\bar{J})$, oppure, equivalentemente, tale che $a(J) = B$?

L'idea di base della trasformazione consiste nell'identificare le due limitazioni B e B' e i valori a_j e a'_j che compaiono dei due problemi, però bisogna trovare il modo di capire come il numero di sottoinsiemi nel problema dei K insiemi minimi è correlato con l'esistenza o meno di una partizione.

A questo scopo si immagini di elencare i sottoinsiemi di $\{1, 2, \ldots, n\}$ a coppie, ogni sottoinsieme con il suo complementare. Dato che $\sum_{j=1}^m a_j = 2\,B$, almeno uno dei due è ammissibile. Lo sono entrambi se e solo se hanno la medesima somma e costituiscono pertanto una partizione.

Allora metà dei sottoinsiemi sono sempre ammissibili. Se e solo se esiste una partizione gli ammissibili sono più della metà. Basta allora prendere $K = 2^{n-1} + 1$.

Ad esempio sia dato $a = \{5, 7, 3, 6, 3\}$ dove $B = 12$. Allora $K = 17$. Gli insiemi ammissibili sono

$$\begin{array}{llllllllll} \emptyset, & \{1\}\,, & \{2\}\,, & \{3\}\,, & \{4\}\,, & \{5\}\,, & \{1,2\}\,, & \{1,3\}\,, & \{1,4\}\,, & \{1,5\} \\ & \{2,3\}\,, & \{2,5\}\,, & \{3,4\}\,, & \{3,5\}\,, & \{4,5\}\,, & \{1,3,5\}\,, & \{3,4,5\} & & \end{array}$$

dove compaiono $\{1, 2\}$ e il suo complementare $\{3, 4, 5\}$ che costituiscono una partizione.

La trasformazione è polinomiale anche se compare il termine $K = 2^{n-1} + 1$. Infatti contano i simboli necessari per rappresentare K, ovvero $\log K = O(n)$. ∎

Il problema può essere risolto da un algoritmo pseudopolinomiale che procede costruendo i sottoinsiemi scandendo gli elementi uno alla volta. Durante la procedura viene mantenuta una tabella ordinata dei K migliori (nel senso della somma) sottoinsiemi. Inizialmente possono essere presenti nella tabella meno di K sottoinsiemi. Nel passo generico della procedura si sono scanditi gli elementi $1 \ldots, p-1$ e la tabella contiene i sottoinsiemi $J_1, \ldots, J_K$, tutti sottoinsiemi di $\{1, \ldots, p-1\}$. Scandire l'elemento p significa aggiungere o meno l'elemento p e prendere i migliori sottoinsiemi. Ovvero si considerano le due tabelle ordinate J_i, $i := 1, \ldots, K$, e $J_i \cup \{p\}$, $i := 1, \ldots, K$. Con una procedura di complessità $O(K)$ si estraggono dalle due tabelle i K migliori sottoinsiemi. Globalmente l'algoritmo ha complessità $O(K\,n)$ e quindi pseudopolinomiale.

Si noti anche che la composizione di un algoritmo polinomiale (la trasformazione) con un algoritmo pseudopolinomiale (la risoluzione di K insiemi minimi) non dà luogo ad un algoritmo pseudopolinomiale. Infatti se si volesse risolvere la partizione in questo modo si avrebbe un algoritmo di complessità $O(2^n\,n)$ che non sarebbe polinomiale nemmeno con la codifica unaria. Infatti la trasformazione non è polinomiale con la codifica unaria in quanto richiederebbe la scrittura di una lunghissima stringa di uscita.