2.51 Esercizio. Si dimostri che il numero di alberi di supporto è n^{n-2} per il grafo completo K_n e $n^{m-1}\,m^{n-1}$ per il grafo completo bipartito K_{nm}. (suggerimento: si sfrutti la proprietà che il determinante non cambia se ad una riga (o colonna) si aggiunge un multiplo arbitrario di un'altra riga (colonna)). ∎

Il Laplaciano (modificato) di K_n è

$$L = \begin{pmatrix} n & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

Aggiungiamo alla prima riga la somma delle righe da 2 a n. Si ottiene

$$L' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

Sia

$$L_1 = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

Allora $\det L = \det L' = \det L_1$. Per calcolare $\det L_1$ procediamo come nel caso precedente in modo da azzerare gli elementi della prima riga tranne l'elemento $L_1(1,1)$. A questo scopo si deve trovare un coefficiente α con cui moltiplicare le righe. Consideriamo il caso generale in cui si ha una matrice L_k di ordine $n-k$ con $(n-1)$ sulla diagonale e -1 in ogni altra posizione. Allora dobbiamo trovare α tale che

$$-1 + \alpha\,(n-1) - \alpha\,(n-k-2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{k+1}$$

L'elemento $(1,1)$ della matrice diventa

$$(n-1) - \alpha\,(n-k-1) = (n-1) - \frac{n-k-1}{k+1} = \frac{n\,k}{k+1}$$

Si ottiene allora per L_1

$$L_1' = \begin{pmatrix} \frac{n}{2} & 0 & \dots & 0 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

e successivamente

$$L_2' = \begin{pmatrix} \frac{2\,n}{3} & \dots & 0 \\ -1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots \\ -1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}, \; \dots$$

$$L_{n-3}' = \begin{pmatrix} \frac{n\,(n-3)}{n-2} & 0 & 0 \\ -1 & n-1 & -1 \\ -1 & -1 & n-1 \end{pmatrix}, \; L_{n-2}' = \begin{pmatrix} \frac{n\,(n-2)}{n-1} & 0 \\ -1 & n-1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\det L = (\prod_{k=1}^{n-2} \frac{n\,k}{k+1})\,(n-1) = n^{n-2}$$

Il Laplaciano di K_{nm} è

$$\begin{pmatrix} m+1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ 0 & m & 0 & 0 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & m & 0 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & m & \dots & -1 & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & n & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & 0 & n & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & 0 & 0 & n \end{pmatrix}$$

Sommando alla prima riga tutte le altre si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & m & 0 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & m & \dots & -1 & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & n & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & 0 & n & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & 0 & 0 & n \end{pmatrix}$$

Quindi è da calcolare il determinante di

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ 0 & m & 0 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & m & \dots & -1 & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 & n & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 & 0 & n \end{pmatrix}$$

Come nel caso precedente il coefficiente α è tale che

$$-1 - \alpha\,(n-2) + \alpha\,n = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

e si ha

$$\begin{pmatrix} \frac{m}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & m & \dots & -1 & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 & n & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 & 0 & n \end{pmatrix}$$

e successivamente si ottiene

$$\begin{pmatrix} \frac{2\,m}{3} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & \dots & -1 & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & n & 0 & 0 \\ -1 & -1 & \dots & 0 & n & 0 \\ -1 & -1 & \dots & 0 & 0 & n \end{pmatrix}$$

fino a

$$\begin{pmatrix} \dfrac{(n-1)\,m}{n} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ -1 & \dots & n & 0 & 0 \\ -1 & \dots & 0 & n & 0 \\ -1 & \dots & 0 & 0 & n \end{pmatrix}$$

da cui si deduce la formula $n^{m-1}\,m^{n-1}$.