

2.28 ESERCIZIO. Si dimostri che per un albero vale la relazione $|N| = |E| + 1$, mentre per una foresta vale $|N| = |E| + k$ con k il numero di componenti connesse. ■

SOLUZIONE. Per definizione un albero è un grafo connesso senza circuiti. Per la connessione esiste un cammino che congiunge due nodi arbitrari. Sia S tale cammino e sia $N(S)$ i nodi in S e $E(S)$ gli archi in S . Ovviamente $|N(S)| = |E(S)| + 1$. Si prenda ora un nodo $i \notin N(S)$. Per la connessione esiste un cammino da i a qualsiasi nodo di $N(S)$; sia j il primo nodo di $N(S)$ sul cammino. Si aggiunga a S il cammino da i a j . Chiaramente si aggiunge lo stesso numero di nodi e di archi. Quindi vale ancora $|N(S)| = |E(S)| + 1$. Si prosegue ricorsivamente fino a che $N(S) = N$. Siccome $|E| \geq |E(S)|$ si ha $|E| \geq |N| - 1$.

Ora si dimostra che se $|E| > |N| - 1$ e il grafo è connesso esiste almeno un circuito. Si ordinino arbitrariamente gli archi e si consideri il grafo di $|N|$ nodi totalmente sconnesso. Tale grafo ha $|N|$ componenti connesse. Si costruisca ora il grafo aggiungendo uno alla volta gli archi secondo l'ordine fissato. Aggiungendo un arco possono succedere due fatti alternativi: o l'arco congiunge due componenti connesse diverse, abbassando di uno il numero di componenti connesse, oppure congiunge due nodi della stessa componente connessa creando un circuito. Il primo fatto può avvenire al massimo $|N| - 1$ volte (perché si passa da $|N|$ a 1 componenti connesse). Quindi dato che $|E| > |N| - 1$ si verifica il secondo fatto almeno una volta creando un circuito.

La seconda parte della tesi discende banalmente dalla prima. ■