2.19 ESERCIZIO. Si dimostri che un grafo bipartito è perfetto (si tratta dell'esercizio 1.60 formulato diversamente). ∎

SOLUZIONE. Se in un grafo bipartito esiste almeno un arco, allora certamente $\chi(G) = 2$ e $\omega(G) = 2$. Se invece è totalmente sconnesso tali valori si abbassano ad 1. Siccome ogni sottografo indotto di un grafo bipartito è bipartito, la tesi è dimostrata.

Si noti che il Teorema del Grafo Perfetto permette di affermare il fatto meno ovvio che $\alpha(G) = \theta(G)$. Sia C la minima copertura di nodi, e quindi si ha $|C| = n - \alpha(G)$ con n numero di nodi del grafo bipartito. In un grafo bipartito ogni decomposizione in cricche consiste di coppie di nodi adiacenti, cioè di un accoppiamento, e di nodi singoli. Sia $\theta(G) = |M| + |S|$ dove M è l'accoppiamento e S è l'insieme di nodi singoli determinati dalla minima decomposizione in cricche. Siccome $n = 2\,|M| + |S|$ si ricava immediatamente $|M| = |C|$ (tesi dell'esercizio 1.60). ∎

2.21 ESERCIZIO. Dimostrare che un grafo è bipartito se e solo se tutti i suoi circuiti sono pari.

SOLUZIONE.

Se un grafo è bipartito ($G = (N_1, N_2, E)$) ogni circuito consiste di una successione alternata di nodi di N_1 e di N_2 e quindi è pari.

Si supponga che ogni circuito sia pari. Si scelga arbitrariamente un nodo che indichiamo con s. Per ogni altro nodo i tutti i cammini $s \rightsquigarrow i$ sono tutti pari o tutti dispari per l'ipotesi sui circuiti. Si definisca N_1 l'insieme dei nodi a distanza pari da s e N_2 l'insieme dei nodi a distanza dispari da s. Due nodi $i \in N_1$ e $j \in N_1$ non possono essere adiacenti perché esisterebbe un circuito dispari $s \rightsquigarrow i \to j \rightsquigarrow s$ e similmente per due nodi di N_2. Quindi il grafo è bipartito. ∎