2.18 ESERCIZIO. Siano assegnati n intervalli $I_1, \ldots, I_n$ in $\mathbb{R}$. Si definisca il *grafo degli intervalli* come un grafo in cui ogni nodo è associato ad un intervallo ed esiste un arco (i, j) se e solo se $I_i \cap I_j \neq \emptyset$ (si veda un esempio in figura 1). Si dimostri che tale grafo è perfetto.

SOLUZIONE. Siano gli intervalli $I_i := [a_i, b_i]$, $i := 1, \ldots, n$. Se avviene $I_i \cap I_j \cap I_k \neq \emptyset$ allora, per definizione, (i, j, k) formano una clique. Facciamo vedere che se (i, j, k) formano una clique allora $I_i \cap I_j \cap I_k \neq \emptyset$.

Per definizione (i, j) è un arco del grafo se $I_i \cap I_j \neq \emptyset$, ovvero se $\max\{a_i\,,\, a_j\} \leq \min\{b_i\,,\, b_j\}$. Allora, se nel grafo esiste la clique $\{i, j, k\}$, si ha

$$\max\{a_i\,,\, a_j\} \leq \min\{b_i\,,\, b_j\}$$

$$\max\{a_i\,,\, a_k\} \leq \min\{b_i\,,\, b_k\}$$

$$\max\{a_j\,,\, a_k\} \leq \min\{b_j\,,\, b_k\}$$

da cui $\max\{a_i\,,\, a_j\,,\, a_k\} \leq \min\{b_i\,,\, b_j\,,\, b_k\}$ cioè $I_i \cap I_j \cap I_k \neq \emptyset$.

Si definisca ora la seguente funzione $f : R \to Z$

$$f(x) := |\,\{i : x \geq a_i\}\,| - |\,\{i : x > b_i\}\,|$$

Allora la funzione f 'conta' gli indici per cui sia $x \geq a_i$ che $x \leq b_i$. Per ogni x è qundi definita una clique e per ogni clique esiste un x che la definisce. Il valore della massima clique è pertanto dato da $\chi = \max f(x)$.

Per colorare il grafo basta ordinare i valori a_i e b_i e scandirli dal minimo al massimo. In un passo generico dell'algoritmo i colori 'impegnati' sono marcati e quelli disponibili sono quindi non marcati. Inzialmente nessun colore è marcato. Se il generico numero da scandire è a_i allora ci sono $\chi - f(a_i - \varepsilon)$ colori disponibili e si può usare uno di questi per colorare il nodo i. Quindi tale colore viene marcato. Se il generico numero da scandire è b_i allora il colore con cui era stato colorato il nodo i diventa nuovamente disponibile e tale colore viene smarcato.

Quindi $\omega(G) = \chi(G)$ e tale relazione deve valere anche per ogni sottografo indotto. Quindi il grafo è perfetto.

Si può anche notare che i massimi locali di $f(x)$ forniscono le clique massimali.

L'algoritmo indicato ha complessità $O(n \log n)$ per ordinare i dati e $O(n)$ per scandirli. Si veda la figura.