

2.15 ESERCIZIO. Si dimostri che in un grafo G un accoppiamento ha la stessa cardinalità di una copertura di nodi se e solo se $\alpha(L(G)) = \theta(L(G))$. Ad esempio nei grafi di figura 2.13 si ha l'eguaglianza, mentre nei grafi di figura 2.14 si ha la diseguaglianza.

SOLUZIONE. A dire il vero l'implicazione è vera solo in un senso, cioè che l'uguaglianza in G implica l'uguaglianza in $L(G)$. Infatti un insieme stabile in $L(G)$ è un insieme di archi in G non incidenti fra loro, ovvero è un accoppiamento in G , e viceversa. Quindi determinare $\alpha(L(G))$ è equivalente a determinare il massimo accoppiamento in G . Ogni nodo i in G dà luogo in $L(G)$ ad una cricca i cui nodi sono gli archi di G incidenti in i . Quindi una copertura di nodi in G diventa una decomposizione in cricche in $L(G)$.

Però non è detto che una decomposizione in cricche in $L(G)$ corrisponda ad una copertura di nodi in G . Infatti in $L(G)$ possono essere presenti delle cricche di tre nodi provenienti da tre archi disposti a cricca in G e non necessariamente incidenti nello stesso nodo. Ad esempio se $G = K_3$ si ha che $L(G) = K_3$ e quindi $\alpha(L(G)) = \theta(L(G)) = 1$ mentre l'accoppiamento massimo in G ha cardinalità 1 e la minima copertura di nodi in G ha cardinalità 2.