2.10 ESERCIZIO. Si dimostri che contraendo un grafo partizionato secondo una coloratura minima (numero cromatico) si ottiene un grafo completo.

SOLUZIONE. Siano i' e j' due pseudonodi del grafo contratto e sia I l'insieme dei nodi contratti in i' e sia J l'insieme dei nodi contratti in j' . Se non esiste l'arco (i', j') allora non esiste nessun arco fra un generico nodo di I ed un generico nodo di J. Quindi per un generico arco (k, j) deve essere $k \notin I \cup J$ e quindi $\chi(k) \neq \chi(i)$, $i \in I$, e $\chi(k) \neq \chi(j)$, $j \in J$. Se ora si ridefinisce $\chi(j) := \chi(i)$ non si viola evidentemente il vincolo di coloratura e il numero dei colori necessari può essere abbassato di uno contraddicendo l'ipotesi di minimalità.

Si noti che la condizione non vale nel senso opposto. Infatti il grafo bipartito

$$\{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$$

colorato come $\chi(1) = A$, $\chi(2) = B$, $\chi(3) = C$, $\chi(4) = A$, una volta contratto dà luogo ad un grafo completo e la colorazione non è certamente minima.

Se valesse anche nel senso opposto esisterebbe un algoritmo estremamente semplice (e polinomiale) per colorare in modo minimo un grafo (si colora arbitrariamente e si vede se il grafo contratto è completo, se non lo è si riesce a colorare con un colore di meno ecc.) in contrasto con i fatti noti della teoria della complessità computazionale.

Tutto quello che si può dire è che, avendo colorato il grafo e avendo scoperto che il grafo contratto non è completo, possiamo ottenere una coloratura migliore che contratta dà luogo ad un grafo completo, ma non abbiamo garanzia di minimalità. (nell'esempio precedente si colori $\chi(4) = D$, quindi il grafo contratto è il grafo stesso e poi si assegni $\chi(4) = A$ dato che non esiste l'arco $(1, 4)$)