2.5 Esercizio. (difficile) Siano $a_1, \ldots, a_n$ numeri ordinati in modo non crescente. Dimostrare che tali numeri sono gradi dei nodi di un grafo se e solo se $b_1, \ldots, b_{n-1}$ lo sono con

$$\begin{cases} b_i = a_{i+1} - 1 & \text{se } 1 \leq i \leq a_1 \\ b_i = a_{i+1} & \text{se } i > a_1 \end{cases}$$

(in altre parole b è ottenuto da a, eliminando a_1 e sottraendo 1 dai successivi a_1 numeri). Facendo uso della proprietà, dimostrare che $(5, 4, 4, 3, 2, 2, 2)$ sono gradi di un grafo (e disegnare il grafo) e che nessun grafo può avere come gradi i numeri $(5, 5, 5, 5, 3, 3)$.

Soluzione. (dimostrazione tratta da Hartsfield, N., G. Ringel [1994],*Pearls in graph theory: a comprehensive introduction - revised and augmented,*Academic Press, San Diego, CA, USA, pag.10.)

Si supponga dapprima che la sequenza $b_1, \ldots, b_{n-1}$ corrisponda ad un grafo G_2. Allora si può costruire un grafo G_1 da G_2 aggiungendo un nodo e collegandolo agli a_1 archi di grado maggiore. Allora i gradi di G_1 sono la sequenza $a_1, \ldots, a_n$.

Si supponga ora che la sequenza $a_1, \ldots, a_n$ corrisponda ad un grafo H. Si indichi per comodità di notazione $a := a_1$. Siano s il nodo di grado a, t_i i nodi di grado a_{i+1}, $1 \leq i \leq a$, e d_i i nodi di grado a_{a+1+i}.

Se s è adiacente a $t_1, \ldots, t_a$ basta rimuovere s e il nuovo grafo ha come gradi la sequenza $b_1, \ldots, b_{n-1}$.

Altrimenti, sia i un indice per cui s non è adiacente a t_i, ma ad un nodo d_j. Per costruzione $t_i \geq d_j$. Se avviene $t_i = d_j$ basta scambiare t_i con d_j e si ricade nel caso precedente. Se invece $t_i > d_j$ deve esistere un nodo w adiacente a t_i e non adiacente a d_j. Si tratta ora di rimuovere gli archi (s, d_j) e (w, t_i) e di inserire gli archi (s, t_i) e (w, d_j). Questa operaqzione non altera i gradi dei nodi.

Si ripete ricorsivamente l'operazione finché s è adiacente solo ai nodi $t_1, \ldots, t_a$.

Si consideri la sequenza $(5, 4, 4, 3, 2, 2, 2)$ (pensiamola riferita ai nodi $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$). Da questa si ottiene $(3, 3, 2, 1, 1, 2)$ riferita ai nodi $2, 3, 4, 5, 6, 7$, cioè, riordinando, $(3, 3, 2, 2, 1, 1)$ riferita ai nodi $2, 3, 4, 7, 5, 6$ (vedi figura 1). Da questa si ottiene $(2, 1, 1, 1, 1)$ riferita ai nodi $3, 4, 7, 5, 6$ (vedi figura 2). Da questa si ottiene $(0, 0, 1, 1)$ riferita ai nodi $4, 7, 5, 6$, ovvero, riordinando $(1, 1)$ riferita ai nodi $5, 6$ (vedi figura 3), da cui infine si ottiene il grafo (figura 4)

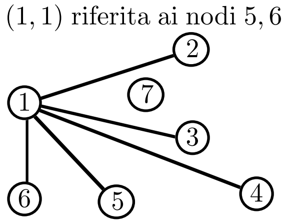

figura 1

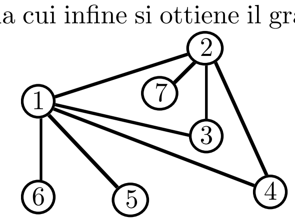

figura 2

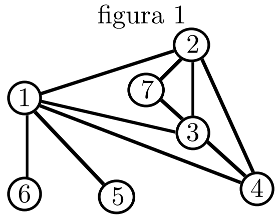

figura 3

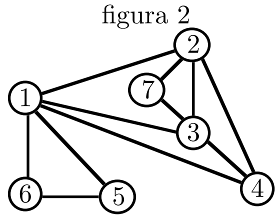

figura 4

Dalla sequenza $(5, 5, 5, 5, 3, 3)$ si ottiene successivamente $(4, 4, 4, 2, 2)$, $(3, 3, 1, 1)$, $(2, 0, 0)$, che non corrisponde ad alcun grafo. ∎