2.4 ESERCIZIO. (facile) Dimostrare che $\sum_{i \in N} \deg(i)$ è pari. Dimostrare che il numero di nodi con grado dispari è pari.

SOLUZIONE. $\sum_{i \in N} \deg(i)$ è equivalente a $\sum_{i \in N} \sum_{e \in E} [e = (i, j)]$ dove $[P] = 1$ se P è vero e $[P] = 0$ se P è falso. Ogni arco viene contato due volte, infatti

$$\sum_{i \in N} \sum_{e \in E} [e = (i, j)] \;=\; \sum_{e \in E} \sum_{i \in N} [e = (i, j)] \;=\; \sum_{e \in E} 2 = 2\,|E|$$

Se vi fosse un numero dispari di nodi con grado dispari la somma dei gradi sarebbe dispari, contrariamente a quanto appena dimostrato. ∎

2.6 ESERCIZIO. (facile) Dimostrare che in ogni grafo vi sono almeno due nodi con lo stesso grado.

SOLUZIONE. Se vi sono almeno due nodi di grado 0 la tesi è vera. Se vi è solo un nodo (o nessuno) di grado 0, consideriamo il resto del grafo, dove, se i nodi sono n il grado di un nodo è un numero da 1 a $n - 1$. Solo $n - 1$ valori sono disponibili per n nodi e almeno due nodi devono avere lo stesso grado.

Ci si può chiedere se esistono grafi con la proprietà di avere tutti i nodi tranne due con grado diverso. Una tale famiglia può essere data da: partendo dal grafo senza archi si costruiscano archi dal nodo n a tutti i nodi da 1 a $n - 1$; si aggiungano archi dal nodo $n - 1$ a tutti i nodi da 2 a $n - 2$; si aggiungano archi dal nodo $n - 2$ a tutti i nodi da 3 a $n - 3$ ecc. fino ad arrivare al nodo $\lceil n/2 \rceil + 1$ per il quale, se n è dispari vengono aggiunti gli archi $((\lceil n/2 \rceil + 1), \lceil n/2 \rceil)$ e $((\lceil n/2 \rceil + 1), \lfloor n/2 \rfloor)$, mentre, se n è pari viene aggiunto l'arco $((n/2 + 1), n/2)$. Si può verificare che il grado di ogni nodo i, per $1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor$, è i, e per $\lfloor n/2 \rfloor + 1 \leq i$, è $i - 1$.

∎