1.91 ESERCIZIO. Si supponga di dover far disegnare ad un plotter i confini di comune di un'area molto estesa (ad esempio una regione). Tale figura è assimilabile ad un grafo connesso $G$, i cui nodi corrispondono ai punti dove almeno tre comuni sono confinanti e i cui archi corrispondono ai confini fra due soli comuni. Il disegno deve essere ovviamente eseguito senza che la punta scrivente passi due volte sulla stessa linea.

Quindi se $G$ è euleriano il disegno è eseguito nel minor tempo quando la punta percorre un circuito euleriano. Tuttavia è normale che $G$ non sia euleriano; in questo caso la punta deve sollevarsi e spostarsi su un altro punto della figura e da lì riprendere il disegno. Quindi il tempo totale di esecuzione del disegno (assimilabile alla distanza percorsa dalla punta) è pari ad una costante (linee del disegno che comunque vanno eseguite) più una parte variabile (segmenti di spostamento).

Dimostrare che il modo più efficiente di eseguire gli spostamenti consiste nel saltare fra due punti della figura corrispondenti a nodi di grado dispari. Si tratta quindi di individuare le coppie di punti su cui eseguire gli spostamenti. Far vedere come questo problema può essere risolto con un problema di accoppiamento pesato di costo minimo.

Si faccia vedere come l'approccio descritto fallisce se il disegno non è connesso. In particolare si consideri il caso estremo di un disegno consistente soltanto in punti isolati. Quale problema si deve risolvere per trovare il modo più rapido per disegnare i punti?

SOLUZIONE. Sia $E$ l'insieme di archi di $G$. Tutti gli spostamenti del plotter corrispondono ad un insieme di archi $E \cup E'$ dove $(N, E \cup E')$ è necessariamente euleriano ($E$ sono gli archi da disegnare e $E'$ sono gli spostamenti in aria). Quindi il grado in $(N, E')$ è pari o dispari come in $(N, E)$.

Se i costi, come avviene nel problema, soddisfano la diseguaglianza triangolare (cioè $c_{ij} \leq c_{ik} + c_{jk}$), per ogni nodo $k$ di grado maggiore di 1 in $(N, E')$ si possono togliere da $E'$ gli archi $(i, k)$ e $(j, k)$, aggiungere l'arco $(i, j)$ ed ottenere un grafo $(N, E \cup E')$ euleriano e di costo non superiore. Iterando l'operazione si ottiene un grafo $(N, E')$ di grado 1 in ogni nodo, cioè un accoppiamento fra i nodi dispari di $(N, E)$.

Se il grafo non è connesso, il caso estremo di un disegno consistente soltanto in punti isolati è analogo ad un TSP e quindi non è risolvibile con il metodo indicato precedentemente.