

1.88 ESERCIZIO. Sia dato un grafo G . Si trovi una trasformazione $\tau : G \mapsto G'$, dove G' è un altro grafo, con la proprietà che G è hamiltoniano se e solo se in G' esiste un cammino hamiltoniano senza nodi estremi fissati. Si ripeta l'esercizio per gli altri casi di cammino hamiltoniano (i nodi estremi fissati vengono decisi dalla trasformazione).

Viceversa si trovi una trasformazione $\tau' : G \mapsto G'$ con la proprietà che G' è hamiltoniano se e solo se in G esiste un cammino hamiltoniano senza nodi estremi fissati. Si ripeta l'esercizio per gli altri casi di cammino hamiltoniano.

SOLUZIONE. Dato un grafo G (ad esempio in figura 1) si scelga un nodo in particolare e lo si duplichi, duplicando anche tutti gli archi incidenti (figura 2). Il grafo G' cercato contiene un cammino hamiltoniano, i cui nodi estremi fissati sono i due nodi del nodo duplicato (nodi neri in figura), se e solo se G è hamiltoniano.

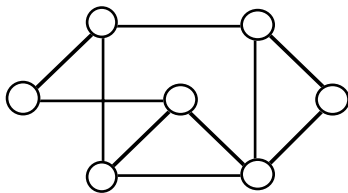


figura 1

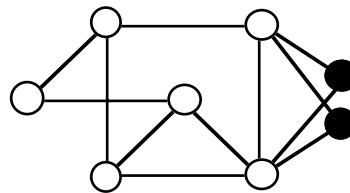


figura 2

Si aggiungano ora ai due nodi particolari altri due nodi connessi solo con un arco ciascuno (figura 3). In questo grafo, anche se non vengono fissati esplicitamente i nodi estremi del cammino hamiltoniano, tuttavia un cammino hamiltoniano deve iniziare e terminare nei due nodi aggiunti.

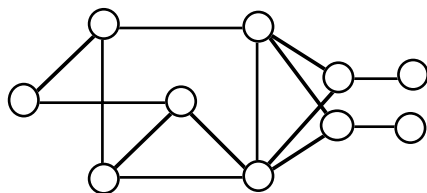


figura 3

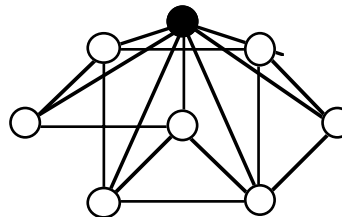


figura 4

Viceversa se al grafo iniziale si aggiunge un nodo connesso con tutti gli altri nodi (figura 4) nel primo grafo esiste un cammino hamiltoniano senza estremi fissati se e solo se nel secondo esiste un circuito hamiltoniano. Se invece il cammino hamiltoniano ha gli estremi fissati (nodi grigi in figura 5) si tratta di aggiungere un nodo e connetterlo con gli estremi (figura 6)

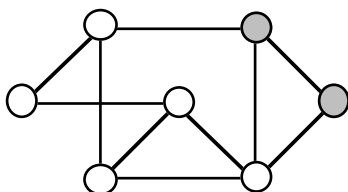


figura 5

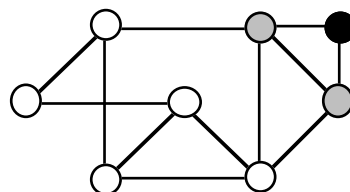


figura 6