1.75 ESERCIZIO. Nel problema del knapsack continuo si effettui la trasformazione di variabile $y_i = b_i\, x_i$, in modo da risolvere il seguente problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i}\, y_i \\ & \sum_{i=1}^{n} \quad y_i \le c \\ & 0 \le y_i \le b_i \quad \forall i \end{aligned} \tag{1}$$

Si deduca la struttura della soluzione ottima.

SOLUZIONE. Si immagini di costruire la soluzione a partire da $y_i = 0$, $\forall i$. Siccome c'è simmetria fra le variabili per il vincolo $\sum_{i=1}^{n} y_i \le c$, conviene assegnare valore positivo alla componente corrispondente al massimo rapporto a_i/b_i. Si saturi allora tale variabile (cioè fino a $y_i = b_i$) oppure si saturi il vincolo $\sum_{i=1}^{n} y_i \le c$. Si prosegua allora assegnando il massimo valore positivo alla variabile corrispondente al secondo rapporto a_i/b_i e così di seguito fino alla saturazione del vincolo $\sum_{i=1}^{n} y_i \le c$. La soluzione così ottenuta è un massimo. Infatti ogni altra soluzione si può ottenere diminuendo i valori di componenti con rapporto a_i/b_i più alto e aumentando quelli di componenti con rapporto a_i/b_i più basso.