1.71 Esercizio. Si formuli il problema della partizione, con il vincolo aggiuntivo che uno dei due sottoinsiemi abbia una cardinalità fissata, usando variabili 0-1.

Soluzione.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i \\ & \sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i \le \sum_{i=1}^{n} a_i/2 \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = k \\ & x_i \in \{0,1\} \quad \forall i \end{aligned}$$

1.73 Esercizio. Si ammettano anche valori negativi nella definizione di un problema di knapsack. Come ci si può ricondurre al caso di valori non negativi?

Soluzione. Se $a_i < 0$ e $b_i \geq 0$ è svantaggioso scegliere l'oggetto i-mo e quindi in ottimalità si deve avere $\hat{x}_i = 0$ (detto altrimenti, per ogni soluzione ammissibile con $x_i = 1$, la soluzione ottenuta cambiando x_i in $x_i = 0$ è ammissibile di valore superiore). Di conseguenza tali variabili possono essere eliminate a priori.

Se invece $b_i < 0$ e $a_i \geq 0$ non è svantaggioso scegliere l'oggetto i-mo e quindi in ottimalità si deve avere $\hat{x}_i = 1$ (detto altrimenti, per ogni soluzione ammissibile con $x_i = 0$, la soluzione ottenuta cambiando x_i in $x_i = 1$ è ammissibile di valore non inferiore). Di conseguenza tali variabili possono essere eliminate a priori.

Se $b_i < 0$ e $a_i < 0$ basta sostituire la variabile x_i con la variabile $y_i = 1 - x_i$ e il problema si riconduce al caso di coefficienti non negativi.

Si noti inoltre che $a_i = 0$, $b_i \geq 0$, implica $\hat{x}_i = 0$ e $b_i = 0$, $a_i \geq 0$, implica $\hat{x}_i = 1$.