

1.60 ESERCIZIO. Si dimostri in modo costruttivo che per ogni grafo bipartito la cardinalità di una copertura minima di nodi è uguale alla cardinalità di un accoppiamento massimo (suggerimento: dato un accoppiamento massimo, si usino cammini che partono da nodi esposti e che alternano archi accoppiati con archi non accoppiati, e si scelgano per la copertura opportuni nodi sui cammini).

SOLUZIONE. Siano  $N_0$  e  $N_1$  i due insiemi di nodi del grafo bipartito. Se l'accoppiamento è perfetto (e allora necessariamente  $|N_0| = |N_1|$ ) ovviamente basta considerare come copertura  $N_0$  oppure  $N_1$ , e si tratta di una copertura di cardinalità uguale ad un accoppiamento.

Se invece l'accoppiamento non è perfetto ed esistono nodi non accoppiati (nodi esposti) l'identificazione di una copertura minima è più complessa. Si consideri un cammino che, partendo da un nodo esposto, alterni archi non accoppiati con archi accoppiati (cammino alternante). Si noti che, essendo l'accoppiamento massimo, nessun cammino alternante può terminare in un nodo esposto, perché altrimenti si potrebbero rendere accoppiati gli archi non accoppiati del cammino alternante, e viceversa, ottenendo un accoppiamento di cardinalità superiore. Quindi un cammino alternante ha un numero pari di archi.

Sia  $i$  un nodo esposto e sia  $N(i)$  l'insieme di nodi raggiungibili da  $i$  (incluso  $i$ ) tramite cammini alternanti e sia  $E(i)$  l'insieme di archi con entrambi gli estremi in  $N(i)$ . Si noti che, essendo il grafo bipartito, un nodo in  $N(i)$  occupa la medesima posizione, pari o dispari, in ogni cammino alternante da  $i$ . I nodi di posizione pari (rispetto a cammini alternanti) in  $N(i)$  costituiscono una copertura per gli archi in  $E(i)$ . Infatti ogni arco in  $E(i)$  ha come estremi un nodo pari e un nodo dispari (il grafo è bipartito) e quindi risulta coperto.

Vogliamo ora dimostrare che, dati due nodi esposti  $i \in N_0$  e  $j \in N_1$ , gli insiemi  $N(i)$  e  $N(j)$  sono disgiunti. Infatti se non fossero disgiunti esisterebbe un cammino alternante da  $i$  a  $j$  violando il fatto che l'accoppiamento è massimo. Allora  $N(i)$  e  $N(j)$  possono avere nodi in comune solo se  $i \in N_0$  e  $j \in N_0$  oppure  $i \in N_1$  e  $j \in N_1$  e non si cade in contraddizione scegliendo i nodi della copertura da  $N(i)$  oppure da  $N(j)$ .

Si indichino i nodi esposti come  $I_0 \subset N_0$  e  $I_1 \subset N_1$ , e siano  $M_0 := \bigcup_{i \in I_0} N(i)$ ,  $M_1 := \bigcup_{i \in I_1} N(i)$  e  $M_2$  i rimanenti nodi. Il sottografo indotto da  $M_2$  presenta necessariamente un accoppiamento perfetto e si possono scegliere come copertura i nodi in  $M_2 \cap N_0$  oppure  $M_2 \cap N_1$ .

Dobbiamo ora dimostrare che la copertura scelta è effettivamente una copertura. Gli archi tutti in  $M_0$  oppure in  $M_1$  oppure in  $M_2$  sono coperti per le considerazioni già esposte. Archi con un estremo in  $M_0$  e l'altro in  $M_1$  connettono nodi pari (altrimenti i nodi in  $M_1$  sarebbero raggiungibili da  $M_0$  o viceversa). Analogamente per i nodi in  $M_2$ . Quindi si tratta effettivamente di una copertura.

Nell'esempio (il grafo è bipartito con  $N_0$  i nodi pari e  $N_1$  i nodi dispari)  $M_0 = N(1) = \{1, 2, 3\}$ ,  $M_1 = N(8) = \{6, 7, 8\}$  e  $M_2 = \{4, 5\}$ . La copertura è data da  $\{2, 4, 7\}$ .

