

1.59 ESERCIZIO. Si dimostri che per ogni grafo la cardinalità di una qualsiasi copertura di nodi è maggiore o uguale alla cardinalità di un qualsiasi accoppiamento. Si trovi un esempio in cui i due valori sono diversi.

SOLUZIONE. Dato un accoppiamento, ogni nodo accoppiato è incidente ad esattamente un arco dell'accoppiamento. Per ogni copertura almeno uno dei due nodi accoppiati deve appartenere alla copertura, altrimenti l'arco non sarebbe coperto, da cui la disuguaglianza cercata. Il più semplice esempio di grafo in cui la disuguaglianza vale strettamente è costituito da K_3 (grafo completo di 3 nodi) in cui il massimo accoppiamento ha cardinalità 1 e la minima copertura ha cardinalità 2.

Di quanto più grande può essere una copertura rispetto ad un accoppiamento? Dato un accoppiamento massimo si considerino tutti i nodi accoppiati. Questi nodi formano una copertura. Infatti, se non lo fossero, ci sarebbero archi i cui estremi non sarebbero accoppiati, ma allora l'accoppiamento non sarebbe massimo. Allora una copertura minima è al più il doppio di un accoppiamento massimo.

Nei grafi completi dispari la copertura minima è esattamente il doppio del massimo accoppiamento. Infatti in un grafo completo la copertura minima ha $n - 1$ nodi (si tenga presente che solo un nodo stabile può esistere in un grafo completo) e un accoppiamento non può mai superare (in generale) la cardinalità $\lfloor n/2 \rfloor$ che è uguale a $(n - 1)/2$ per grafi dispari.