

1.52 ESERCIZIO. Si modifichi l'esempio 1.50 assegnando inoltre due nodi particolari e si imponga la condizione che i due nodi vengano sconnessi dalla rimozione degli archi. Si dimostri che il valore ottimo dell'esempio 1.50 modificato è sempre maggiore o uguale al valore ottimo dell'esempio 1.51 (si vedrà più avanti che i due valori ottimi devono essere uguali). ■

SOLUZIONE. La proprietà di non intersezione di cammini richiesta nell'esempio 1.51 va riferita agli archi (intendendo un cammino come un insieme di archi). Per ogni taglio che separa due nodi assegnati, un generico cammino fra i due nodi deve contenere almeno un arco del taglio. Quindi la cardinalità del taglio definisce una limitazione superiore al numero di cammini disgiunti negli archi. Allora un taglio di minima cardinalità fra due nodi dati è una limitazione superiore al numero di cammini disgiunti. Se si trovano un taglio e un insieme di cammini disgiunti di pari cardinalità devono essere necessariamente ottimi.

Se si vuole modificare il problema restringendo l'insieme di cammini a cammini disgiunti anche nei nodi, bisogna modificare il grafo in un grafo orientato in cui ogni arco viene sostituito da una coppia di archi orientati antiparalleli (figura 1). Successivamente ogni nodo i (tranne la sorgente e la destinazione) viene sostituito da due nodi i^- e i^+ . Ogni arco (i, j) viene modificato in (i^+, j^-) (figura 2). Infine si aggiungono archi (i^-, i^+) (figura 3). A questo punto ogni cammino orientato in questo grafo è obbligato a percorrere l'arco (i^-, i^+) se nel grafo originale attraversa il nodo i . Quindi nel nuovo grafo orientato i cammini orientati disgiunti negli archi sono cammini disgiunti nei nodi nel grafo originale. In figura 5 si veda la soluzione corrispondente a due cammini.

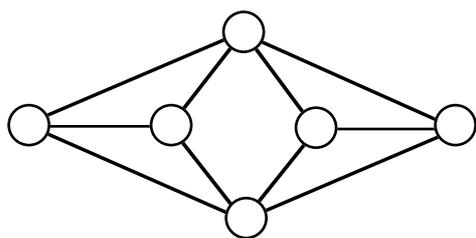


fig. 1

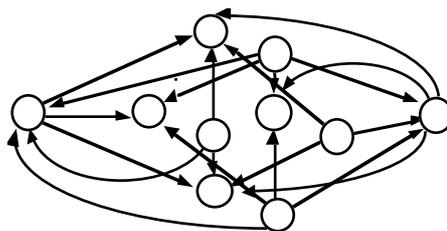


fig. 2

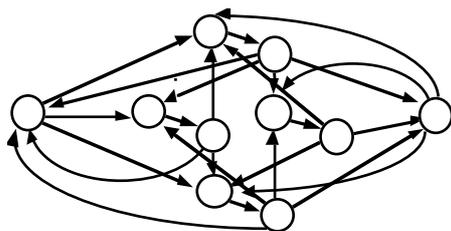


fig. 3

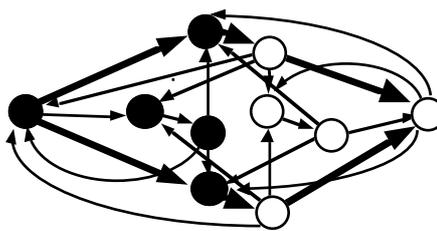


fig. 4