1.42 Esercizio. Si dimostri che, dato un grafo connesso con lunghezze positive e assegnato un nodo particolare s, esiste sempre un albero di supporto tale che l'unico cammino da s a i sull'albero è un cammino minimo da s a i nel grafo, per ogni i.

Soluzione. Dimostriamo inizialmente che, dati due cammini minimi $P_i : s \rightsquigarrow i$ e $P_j : s \rightsquigarrow j$, nell'ipotesi di lunghezze positive non può esistere un arco (h,k) che appartenga ad entrambi i cammini e che sia percorso in direzioni opposte (cioè $P_i : s \rightsquigarrow h \to k \rightsquigarrow i$ e $P_j : s \rightsquigarrow k \to h \rightsquigarrow j$). Infatti, per definizione di cammino minimo, per la lunghezza $L(P_i)$ vale $L(P_i) \le L(s \rightsquigarrow k \rightsquigarrow i)$ (dove $s \rightsquigarrow k$ è su P_j e $k \rightsquigarrow i$ è su P_i) e similmente vale $L(P_j) \le L(s \rightsquigarrow h \rightsquigarrow j)$ (dove $s \rightsquigarrow h$ è su P_i e $h \rightsquigarrow j$ è su P_j). Si noti che i cammini $s \rightsquigarrow k \rightsquigarrow i$ e $s \rightsquigarrow h \rightsquigarrow j$ potrebbero essere non semplici, ma questo non pregiudica il ragionamento. Quindi

$$L(P_i) + L(P_j) \le L(s \rightsquigarrow k \rightsquigarrow i) + L(s \rightsquigarrow h \rightsquigarrow j) = L(P_i) + L(P_j) - 2\,c_{hk}$$

(con c_{hk} lunghezza dell'arco (h,k)) da cui $c_{hk} \le 0$.

Siano P_i i cammini minimi $s \rightsquigarrow i$ per ogni i. Si consideri l'insieme di archi $S := \bigcup_i P_i$. Gli archi di S possono essere orientati a seconda del verso in cui sono percorsi dai cammini minimi. In base al precedente risultato se un arco è percorso da più cammini l'orientazione è la medesima per tutti i cammini.

Vogliamo ora dimostrare un secondo risultato: esistono circuiti (senza tenere conto dell'orientazione) in S se e solo se esiste almeno un nodo con almeno due archi (orientati) entranti. Se in un nodo arrivano due archi, questi appartengono a due cammini minimi diversi e siccome partono entrambi da s, deve esistere un circuito. Se in ogni nodo entra al più un arco, S, essendo connesso, è costituito da un albero orientato (e necessariamente con radice in s) oppure da un unico circuito orientato al quale sono appesi alberi orientati. Nel primo caso non esistono circuiti e nel secondo il circuito deve contenere s (altrimenti il cammino da s ad un nodo del circuito darebbe luogo ad un secondo arco entrante); quindi ci sarebbe un cammino minimo da s che conterrebbe s creando un circuito; essendo le lunghezze positive questo cammino può essere rimpiazzato da un cammino più corto ottenuto eliminando il circuito, contraddicendo così la minimalità dei cammini.

Ora, se S non contiene circuiti è un albero e la tesi è dimostrata. Altrimenti, in base al precedente risultato, esiste un nodo k con due archi entranti (i,k) e (j,k). Le lunghezze dei cammini corrispondenti fino a k devono essere identiche, altrimenti si potrebbe ottenere un cammino più corto prendendo il cammino più corto fino a k e poi proseguendo sull'altro cammino. Allora si possono "dirottare" tutti i cammini che usano ad esempio l'arco (j,k) sul cammino che usa l'arco (i,k). A questo punto S viene aggiornato togliendo l'arco (j,k). Il ragionamento procede ricorsivamente finché sono stati eliminati tutti i circuiti da S.

La tesi non è vera in generale con lunghezze arbitrarie. Si consideri il seguente grafo dove nessun albero può contenere i due cammini minimi indicati (si noti l'arco percorso in direzioni opposte).