1.37 Esercizio. Data una permutazione $(x_1, \ldots, x_n)$ si definisca il seguente intorno

$$N_x := \{y \in S_n : y_j = x_i,\, y_i = x_j,\, y_k = x_k \text{ per } k \neq i,\, k \neq j, \text{ per ogni } i \neq j\}$$

che corrisponde a permutazioni ottenute scambiando i nodi di destra del grafo bipartito per due archi fissati (si veda in figura 1.12 un elemento dell'intorno della permutazione in figura 1.11 ottenuto scambiando gli archi 2-3 e 3-4 con 2-4 e 3-3). Si costruisca un controesempio con $n = 3$ che faccia vedere come tali intorni non siano esatti. Come andrebbe allargato l'intorno affinché sia esatto? (suggerimento: si considerino un minimo locale non globale e un minimo globale, e si considerino gli archi che appartengono soltanto ad una delle due soluzioni, questi archi hanno una struttura particolare...). ∎

Soluzione. Si consideri l'istanza in figura $a$ con la soluzione indicata di valore 3. Le tre soluzioni dell'intorno sono indicate nelle figure $b$, $c$ e $d$, e sono di valore 4, quindi la soluzione in figura $a$ è un minimo locale discreto. Tuttavia il valore ottimo è indicato in figura $e$ e non appartiene all'intorno.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 0 |
| 0 | 1 | 3 |
| 3 | 0 | 1 |

a

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 0 |
| 0 | 1 | 3 |
| 3 | 0 | 1 |

b

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 0 |
| 0 | 1 | 3 |
| 3 | 0 | 1 |

c

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 0 |
| 0 | 1 | 3 |
| 3 | 0 | 1 |

d

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 0 |
| 0 | 1 | 3 |
| 3 | 0 | 1 |

e

Per allargare l'intorno in modo da renderlo esatto si considerino due soluzioni qualsiasi. Facendo riferimento alla rappresentazione di una permutazione come un accoppiamento in un grafo bipartito, siano $E_1$ gli archi dell'accoppiamento della prima soluzione e $E_2$ quelli della seconda. Si consideri $\bar{E} := (E_1 \cup E_2) \setminus (E_1 \cap E_2)$ (cioè gli archi che appartengono esattamente ad una delle due soluzioni). $\bar{E}$ è costituito da un insieme di circuiti disgiunti formati alternativamente da archi di $E_1$ e da archi di $E_2$. Per un circuito generico $C$ sia $\Delta(C)$ la differenza fra il costo degli archi di $E_2$ su $C$ e degli archi di $E_1$ su $C$. Si supponga ora che $\Delta(C) \geq 0$ per ogni $C$. Questo implica che il costo della prima soluzione è non maggiore del costo della seconda soluzione. Se la condizione $\Delta(C) \geq 0$ per ogni $C$ è verificata per ogni soluzione $E_2$ necessariamente la prima soluzione è un minimo globale.

Allora se si definisce l'intorno come la permutazione ottenuta scambiando gli archi su un generico circuito (anzichè di solo quattro archi come nell'ipotesi iniziale) tale intorno risulta esatto. Ovviamente l'intorno è diventato molto più ampio, tuttavia una sua esplorazioe efficiente è sempre possibile (si vedano più avanti la sezione 8.10 e il capitolo 10). Nell'esempio precedente la soluzione di figura $e$ appartiene al nuovo intorno della soluzione di figura $a$.