1.35 Esercizio. Siano assegnati n numeri $a_1, \ldots, a_n$. Possiamo supporre che corrispondano a durate di esecuzione di n lavori diversi. Per ogni permutazione x siano definite le n quantità $C_k(x) := \sum_{i=1}^k a_{x'_i}$, $k = 1, \ldots, n$, che corrispondono al tempo di completamento del k-mo lavoro nella permutazione x. Si definisca la seguente funzione obiettivo da minimizzare $f(x) := \sum_{k=1}^n C_k(x)$. Si dimostri che il problema è equivalente al problema dell'esempio 1.34. ∎

Soluzione.

$$f(x) = \sum_{k=1}^n C_k(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k a_{x'_i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n a_{x'_i} = \sum_{i=1}^n (n-i+1)\, a_{x'_i} =$$

$$\sum_{i=1}^n (n+1)\, a_{x'_i} - \sum_{i=1}^n i\, a_{x'_i} = (n+1) \sum_{i=1}^n a_{x'_i} - \sum_{i=1}^n i\, a_{x'_i} = (n+1) \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n i\, a_{x'_i}$$

Il termine $(n+1) \sum_{i=1}^n a_i$ è costante e quindi minimizzare $f(x)$ è equivalente a minimizzare $-\sum_{i=1}^n i\, a_{x'_i}$ cioè a massimizzare $\sum_{i=1}^n i\, a_{x'_i}$.

Allora in base al risultato dell'esempio 1.34 la schedulazione ottima è quella che schedula prima i lavori più brevi.