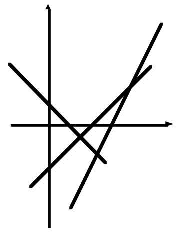
1.28 ESERCIZIO. Si trovino due funzioni f_1 e f_2 in modo da avere $|x| = \max\{f_1(x)\ ;\ f_2(x)\}$. ▮

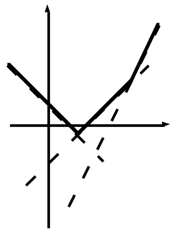
SOLUZIONE.

$$f_1(x) = x, \qquad f_2(x) = -x$$

1.29 ESERCIZIO. Si calcoli il minimo di $f(x) := \max\{1 - x\ ;\ x - 2\ ;\ 2\,x - 6\}$, $F := \mathbb{R}$. ▮

SOLUZIONE. Le tre funzioni che definiscono f sono le seguenti tre rette, per cui $f(x)$ è quella indicata in figura e il minimo $x = 3/2$ si può ottenere per via grafica.





Senza ricorrere al disegno si può notare che il minimo deve corrispondere al punto di intersezione di due funzioni lineari, fra quelle definenti f. In questo caso si tratta di calcolare

$$1 - x = x - 2, \qquad x - 2 = 2\,x - 6, \qquad 1 - x = 2\,x - 6$$

che fornisce i seguenti tre valori

$$x_1 := 3/2, \qquad x_2 := 4, \qquad x_3 := 7/3$$

Sostituendo questi valori in $f(x)$ si determina quali di essi è il minimo.

Qresta procedura è abbastanza dispendiosa dal punto di vista computazionale. Se in generale f è definita come il max di n funzioni lineari, è richiesto il calcolo di $n\,(n-1)/2$ valori e per ognuno di essi bisogna valutare n funzioni lineari. Quindi la procedura richiede un numero di operazioni cubico in n.

Più rapido è il seguente metodo: dati due valori x^- e x^+ tali che il minimo sia incluso in $[x^-, x^+]$, si valutino $f(x^-)$ e $f(x^+)$. Si indichi con i l'indice per cui $f(x^-) = a_i\,x^- - b_i$ e con j l'indice per cui $f(x^+) = a_j\,x^+ - b_j$. Si calcoli il punto $\hat{x}$ tale che $a_i\,\hat{x} - b_i = a_j\,\hat{x} - b_j$ e indichi con k l'indice per cui $f(\hat{x}) = a_k\,\hat{x} - b_k$. Se $k = i$ oppure $k = j$ oppure $a_k = 0$ allora $\hat{x}$ è il minimo, altrimenti se $a_k < 0$ si aggiorna $x^- := \hat{x}$ e se $a_k > 0$ si aggiorna $x^+ := \hat{x}$. Si ripete la procedura che deve terminare in al più n passi (f è lineare a tratti ed è formata da al più n tratti). Per ogni passo è richeisto il calcolo di f e quindi il numero di operazioni è quadratico in n.