1.26 Esercizio. Si dimostri che non possono esistere quattro diseguaglianze lineari in $\mathbb{R}^2$ con le seguenti proprietà: a) l'insieme definito dalle quattro diseguaglianze è vuoto; b) gli insiemi definiti da tre delle quattro diseguaglianze sono ammissibili per qualsiasi terna. ∎

Soluzione. Si indichino con α, β, γ e δ le quattro diseguaglianze. Per l'ipotesi b) α, β e γ definiscono un insieme ammissibile F che può essere un semipiano (fig. 1), un cono traslato (fig. 2), un poligono illimitato (fig. 3) oppure un triangolo (fig. 4). Per l'ipotesi a) il semipiano ammissibile H definito da δ ha intersezione vuota con F.

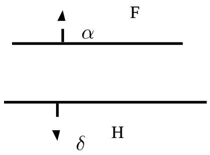

fig. 1

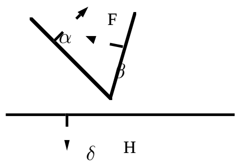

fig. 2

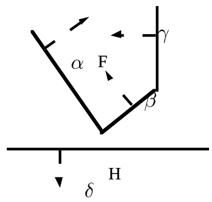

fig. 3

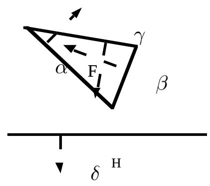

fig. 4

Nel caso di fig. 1 α, β, γ e δ devono corrispondere a semipiani definiti da rette parallele. Supponendo α la diseguaglianza più restrittiva fra α, β e γ risulta che non esistono valori ammissibili per α e δ contraddicendo l'ipotesi b).

Negli altri tre casi esiste almeno un vertice per F. Se si trasla H fino ad ottenere intersezione non vuota con F (fig. 5), tale intersezione deve contenere almeno un vertice. Si consideri il cono definito dalle due semirette uscenti dal vertice. Tale cono ha intersezione vuota con H (dato che la traslazione è diversa da zero) e quindi l'insieme ammisibile dato da queste due diseguaglianze e da δ è vuoto contraddicendo l'ipotesi b).

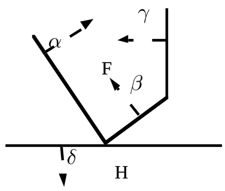

fig. 5

Il risultato non è estendibile a dimensione maggiore di due, essenzialmente perché solo in dimensione due un cono è definito da un numero limitato di diseguaglianze (due appunto) mentre in dimensione maggiore di due vi sono coni definiti da un numero arbitrario di diseguaglianze. Ad esempio le ipotesi a) e b) possono essere entrambe soddisfatte in dimensione tre con le quattro diseguaglianze corrispondenti alle facce di un tetraedro e con i semispazi ammissibili dalla parte opposta al tetraedro.