1.21 ESERCIZIO. Si indichi una procedura per massimizzare $x\,Q\,x + c\,x$ su $F := \{0,1\}^n$. Anche questo caso è facilmente risolvibile. Si chiede di riformulare il problema come un problema di massimo lineare su un insieme di diseguaglianze lineari (si riveda l'esercizio 1.17).

SOLUZIONE. Il problema è facilmente risolvibile nel senso che la non linearità è facilmente riformulabile in modo lineare e sempre con variabili 0-1. Dopodiché si può risolvere con algoritmi di programmazione lineare 0-1 (vedi Cap. 14). Se il problema sia in generale facile o difficile in senso formale, cioè secondo la teoria della complessità computazionale (vedi Cap. 3), si noti che il problema:

$$\exists ?x \in \{0,1\}^n : A\,x = b$$

con A matrice $m \times n$, si può trasformare nel problema:

$$\exists ?x \in \{0,1\}^n : (A\,x - b)^T (A\,x - b) = 0$$

ovvero

$$\exists ?x \in \{0,1\}^n : x^T A^T A\,x - 2\,b^T A\,x + b^T b = 0$$

Siccome per ogni $x \in \{0,1\}^n$ si ha $x^T A^T A\,x - 2\,b^T A\,x + b^T b \geq 0$, si vede che trovare il minimo di una generica espressione $x\,Q\,x + c\,x$ permette di rispondere alla domanda $\exists ?x \in \{0,1\}^n : A\,x = b$. Siccome quest'ultimo è un problema **NP**-completo, il problema in esame è **NP**-difficile e quindi la procedura di linearizzazione e trasformazione in un problema lineare 0-1 è giustificata.

Nell'esercizio 1.17 erano presenti solo due variabili e questo rendeva il problema particolarmente facile, ma aumentando il numero di variabili sorgono complicazioni. Ad esempio mentre il poliedro di figura 1.7 aveva vertici interi, già con tre variabili il poliedro dato dalle diseguaglianze

$$\begin{gathered}
y_{12} \leq y_{11}, \quad y_{12} \leq y_{22}, \quad y_{11} + y_{22} \leq y_{12} + 1, \\
y_{13} \leq y_{11}, \quad y_{13} \leq y_{33}, \quad y_{11} + y_{33} \leq y_{13} + 1, \\
y_{23} \leq y_{22}, \quad y_{23} \leq y_{33}, \quad y_{22} + y_{33} \leq y_{23} + 1, \\
0 \leq y_{ij} \leq 1
\end{gathered}$$

dove $y_{ij} := x_i\,x_j$, $i \neq j$, e $y_{ii} := x_i = x_i^2$, ha fra i suoi vertici anche il punto

$$y_{11} = \frac{1}{2}, \quad y_{12} = 0, \quad y_{13} = 0, \quad y_{22} = \frac{1}{2}, \quad y_{23} = 0, \quad y_{33} = \frac{1}{2}$$