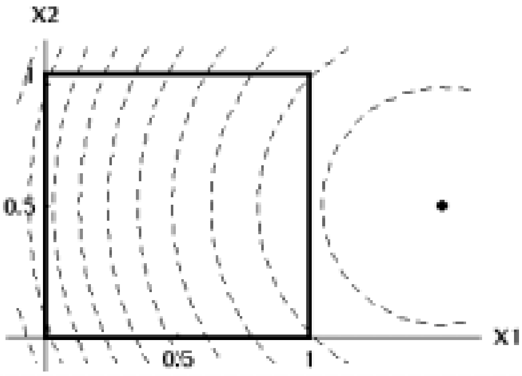
1.11 Esercizio. Si trovi l'ottimo per le seguenti funzioni obiettivo (F come nell'esempio 1.10):

$$f(x) := (x_1 - \frac{3}{2})^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2$$

$$f(x) := 17\,x_1^2 - 2\,x_1\,x_2 + x_2^2 - 24\,x_1 + 9$$

$$f(x) := (x_1 - \frac{1}{2})\,(x_2 - \frac{1}{2})$$

Soluzione. Le linee di livello della prima funzione sono

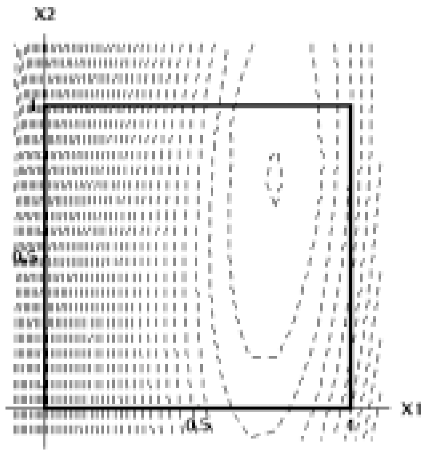


Il minimo assoluto della funzione $(3/2, 1/2)$ non è ammissibile. La funzione cresce a cerchi concentrici a partire da tale punto e, graficamente, si vede che il minimo si ottiene per la circonferenza che tocca il bordo verticale destro di F. Quindi l'ottimo è $(1, 1/2)$.

Essendo F un prodotto cartesiano ed essendo la funzione obiettivo separabile nelle variabili, si può in questo caso operare una minimizzazione variabile per variabile, ottenendo il medesimo risultato.

Si noti che la linea di livello passante per l'ottimo ha la frontiera come tangente.

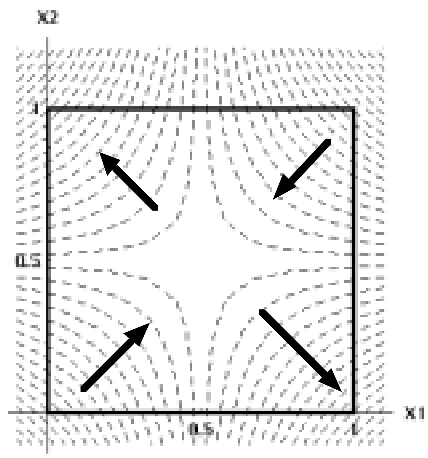
Le linee di livello della seconda funzione sono ellissi concentriche



Il minimo risulta essere interno ad F, quindi, per calcolarlo, possiamo derivare separatamente rispetto ad x_1 e x_2, porre uguale a zero e risolvere il sistema che si ottiene. L'ottimo è $(3/4, 3/4)$.

In questo caso la funzione obiettivo non è separabile e quindi non si può ottimizzare separatamente nelle variabili.

Le linee di livello della terza funzione sono una famiglia di iperboli (le frecce indicano la direzione verso cui la funzione cala)



Si vede che ci sono due ottimi e cioè $\hat{x}^1 := (1,0)$ e $\hat{x}^2 := (0,1)$. ∎