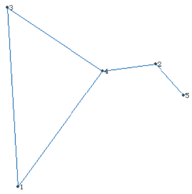
1) Data la seguente istanza di TSP (grafo completo con 5 nodi):

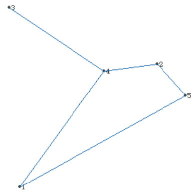
$$c_{12} = 52; \quad c_{13} = 51; \quad c_{14} = 40; \quad c_{15} = 53; \quad c_{23} = 44;$$

$$c_{24} = 15; \quad c_{25} = 12; \quad c_{34} = 32; \quad c_{35} = 55; \quad c_{45} = 24$$

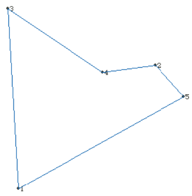
Si calcoli l'ottimo duale (formulazione usando come vincolo esplicito il grado dei nodi e vincolo implicito l'appartenenza ai quasi alberi sul nodo 1) con un algoritmo di quasi ascesa, sapendo che l'ottimo duale vale 163.



(a)



(b)



(c)

**Soluzione** Partendo con il valore $u^1 := 0$ si ottiene il quasi albero di Figura (a) per il quale il subgradiente è $(0, 0, 0, -1, 1)$, con valore di $L(u^1) = 150$. Applicando la formula di quasi ascesa si ottiene

$$u^2 = u^1 + \frac{163 - L(u^1)}{u^1 \cdot u^1}\, u^1 = (0, 0, 0, -13/2, 13/2)$$

da cui il quasi albero di Figura (b) con subgradiente $(0, 0, 1, -1, 0)$ e $L(u^2) = 317/2$. Applicando nuovamente la formula di quasi ascesa si ha $u^3 = (0, 0, 9/4, -35/4, 13/2)$ che produce il tour in Figura (c).

2) Dato un grafo con lunghezze positive per ogni arco si consideri il problema di calcolare il cammino di lunghezza minima di almeno $k$ archi ($k$ fissato), fra due nodi assegnati. Si supponga di affrontarlo tramite il problema duale, imponendo come vincolo esplicito il fatto che il numero di archi sia almeno $k$. Il calcolo della funzione duale per un assegnato valore della variabile duale, è un problema facile o difficile? Quali e quanti sono i punti di rottura della funzione duale?

**Soluzione** Sia $x$ un vettore d'incidenza che individua un sottoinsieme di archi e sia $\mathcal{P}$ l'insieme dei vettori d'incidenza che rappresentano cammini semplici fra due nodi assegnati. Il problema allora si può porre come:

$$\begin{aligned} \min \quad & c\,x \\ & \mathbf{1}\,x \geq k \\ & x \in \mathcal{P} \end{aligned}$$

Il duale è dato da

$$L(u) = \min_{x \in \mathcal{P}} c\,x + u\,(k - \mathbf{1}\,x) = u\,k + \min_{x \in \mathcal{P}} \sum_e (c_e - u)\,x_e$$

Esistono algoritmi efficienti di cammino minimo se non esistono cicli negativi. Questo fatto può però presentarsi per valori elevati di $u$. Quindi in generale il calcolo della funzione duale non è facile se $\mathcal{P}$ contiene solo cammini semplici. Se estendiamo $\mathcal{P}$ all'insieme $\mathcal{P}'$ di cammini generici, si ha $L'(u) = -\infty$ se sono presenti cicli negativi. Siccome l'esistenza di cicli negativi si determina in modo polinomiale, la funzione duale $L'(u)$ si calcola in modo polinomiale. Tuttavia, indicando con $u'$ il minimo valore di $u$ per cui esiste un ciclo nullo si ha

$$L(u) = L'(u) \quad \text{se } u \leq u', \qquad L(u) > L'(u) = -\infty \quad \text{se } u > u'$$

e quindi se $\operatorname{argmax} L(u) > u'$, $\max_u L'(u) < \max_u L(u)$ con una limitazione inferiore peggiore.

Si ripartisca $\mathcal{P}$ in tanti sottoinsiemi $\mathcal{P}_i := \{x \in \mathcal{P} : \mathbf{1}\,x = i\}$ e si noti che

$$\min_{x \in \mathcal{P}_i} \sum_e (c_e - u)\,x_e = -u\,i + \min_{x \in \mathcal{P}_i} \sum_e c_e\,x_e$$

Sia $\hat{c}_i$ la lunghezza del cammino minimo di $i$ archi. Allora

$$L(u) = u\,k + \min_{i:=1,2,\ldots,n} \hat{c}_i - u\,i$$

e la funzione duale ha al più $n$ punti di rottura.

3) Si consideri il problema dell'assegnamento pesato per dei costi dati dalla seguente tabellina

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 5 | 7 |
| 1 | 4 | 2 |
| 6 | 2 | 5 |

Lo si modelli come il seguente problema

$$\begin{aligned} \min \; & \sum_i \sum_j c_{ij}\, x_{ij} \\ & \sum_i x_{ij} = 1 \quad \forall j \\ & \sum_j x_{ij} = 1 \quad \forall i \\ & x_{ij} \in \{0,1\} \end{aligned}$$

Si costruisca il problema duale prendendo il primo gruppo di equazioni ($\sum_i x_{ij} = 1 \quad \forall j$, con $i$ indice di riga) come vincolo esplicito e il resto come vincolo implicito.

Si scriva come si calcola la funzione duale nel caso generale e poi si calcoli $L(0)$ per l'istanza in esame. Si determini il gradiente di $L(u)$ per $u = 0$, si determini l'ottimo duale e si verifichi la dualità forte.

**Soluzione**: La funzione duale è

$$L(u) = \min_{\substack{\sum_j x_{ij} = 1, \forall i \\ x_{ij} \in \{0,1\}}} \sum_i \sum_j c_{ij}\, x_{ij} + \sum_j u_j \Big( \sum_i x_{ij} - 1 \Big) =$$

$$= -\sum_j u_j + \min_{\substack{\sum_j x_{ij} = 1, \forall i \\ x_{ij} \in \{0,1\}}} \sum_i \Big( \sum_j (c_{ij} + u_j)\, x_{ij} \Big) =$$

$$= -\sum_j u_j + \sum_i \min_{\substack{\sum_j x_{ij} = 1 \\ x_{ij} \in \{0,1\}}} \Big( \sum_j (c_{ij} + u_j)\, x_{ij} \Big) = -\sum_j u_j + \sum_i \min_j \{c_{ij} + u_j\} =$$

Risolvendo l'istanza per $u := 0$ si tratta di calcolare il minimo di $c_{ij}$ riga per riga, e quindi di scegliere i valori indicati in grassetto

| | | |
|---|---|---|
| **3** | 5 | 7 |
| **1** | 4 | 2 |
| 6 | **2** | 5 |

Si ottiene quindi una soluzione $\bar{x}$ non ammissibile per il vincolo esplicito. Siccome $\sum_i \bar{x}_{i1} = 2$, $\sum_i \bar{x}_{i2} = 1$, $\sum_i \bar{x}_{i3} = 0$, il gradiente di $L(u)$ in $u = 0$ vale $(1, 0, -1)$. Prendendo lunghezza del passo uguale a 1 si può calcolare $L(u)$ in $u := (1, 0, -1)$. Si ottiene la seguente tabellina dei costi modificati $(c_{ij} + u_j)$, con già evidenziati i minimi per riga. La nuova soluzione è ammissibile per il vincolo esplicito ed è quindi ottima.

| | | |
|---|---|---|
| **4** | 5 | 6 |
| 2 | 4 | **1** |
| 7 | **2** | 4 |

4) Si risolva con un approccio duale il problema

$$\min \frac{1}{2}\, x^T\, Q\, x + c^T\, x$$
$$A\, x \leq b$$

assumendo $A\, x \leq b$ vincolo esplicito (quindi senza vincolo implicito).

In particolare si prenda

$$Q := \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad c := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Essendo il problema convesso (perché?) vale la dualità forte e si possono applicare le condizioni globali di ottimalità per diversi tipi di soluzioni.

Determinare la mappa che associa alle variabili duali il gradiente di $L(u)$.

**Soluzione**: La funzione duale è

$$L(u) = \min \frac{1}{2}\, x^T\, Q\, x + c^T\, x + u\, (A\, x - b)$$

Se $Q$ è positiva semidefinita il minimo si ottiene dove si annulla il gradiente di $L(x,u)$ (in quanto funzione di $x$). Allora

$$DL_x(x,u) = Q\, x + c + A^T\, u^T = 0 \Longrightarrow x := -\, Q^{-1}\, (c + A^T\, u^T) \tag{1}$$

e sostituendo si ha

$$L(u) = \frac{1}{2}\, (c^T + u\, A)\, Q^{-1}\, (c + A^T\, u^T) - (c^T + u\, A)\; Q^{-1}\, (c + A^T\, u^T) - u\, b =$$

$$L(u) = -\frac{1}{2}\, (c^T + u\, A)\, Q^{-1}\, (c + A^T\, u^T) - u\, b =$$

Si ottiene

$$DL(u) = -A\, Q^{-1}\, A^T\, u^T - A\, Q^{-1}\, c - b$$

che si annulla per

$$\bar{u}^T := -\, (A\, Q^{-1}\, A^T)^{-1}\, (A\, Q^{-1}\, c + b)$$

Le linee di livello di $L(u)$ sono pertanto degli ellissoidi centrati in $\bar{u}$. Il massimo assoluto di $L(u)$ si ha in $\bar{u}$. Però, siccome $u$ deve essere non negativa, questo valore potrebbe non essere ammissibile. Seguendo la teoria dei massimi di funzioni concave, oppure equivalentemente la condizione di complementarità delle condizione globali di ottimalità (applicabii perché il problema è convesso), il massimo $\hat{u}$ deve essere tale che

$$DL_j(\hat{u})\, \hat{u}_j = 0, \quad \hat{u}_j \geq 0, \quad DL_j(\hat{u}) \leq 0$$

Applicando ai dati dell'istanza si ha

$$DL(u) = (1 - u_1 + u_2\; ;\; -3 + u_1 - 2\, u_2)$$

Quindi l'ottimo $\hat{u}$ deve appartenere all'insieme (per soddisfare la condizione $\hat{u}_j \geq 0, \quad DL_j(\hat{u}) \leq 0$)

$$\begin{aligned} u_1 - \phantom{2}\, u_2 &\geq 1 \\ u_1 - 2\, u_2 &\leq 3 \\ u_1 \phantom{- 2\, u_2} &\geq 0 \\ u_2 &\geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

e deve appartenere all'insieme (per soddisfare la condizione $DL_j(\hat{u})\, \hat{u}_j = 0$)

$$\{\{u : u_1 = 0\} \cup \{u : u_1 - u_2 = 1\}\} \cap \{\{u : u_2 = 0\} \cup \{u : u_1 - 2\, u_2 = 3\}\} \tag{3}$$

che è dato dai quattro punti

$$u^1 := (0,0), \quad u^2 := (0, 3/2), \quad u^3 := (1,0), \quad u^4 := (-1,-2)$$

Per sostituzione in (2) si vede che solo $u^3$ è ammissibile ed è quindi l'ottimo duale. L'ottimo primale si ricava da (1) inserendo per $u$ l'ottimo duale e si ottiene $\hat{x} = (-2, 2)$. Si noti che la dualità forte è verificata. Infatti $L(1,0) = f(-2,2) = -2$.

Se invece

$$Q := \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

si trova

$$DL(u) = (\frac{-4 - 2\, u_1 - u_2}{8} \; ; \; \frac{-12 - 2\, u_1 - 5\, u_2}{16})$$

e quindi (2) diventa

$$\begin{aligned} -\, 2\, u_1 - \phantom{5}\, u_2 &\leq \phantom{1}4 \\ -\, 2\, u_1 - 5\, u_2 &\leq 12 \\ u_1 \phantom{- 5\, u_2} &\geq \phantom{1}0 \\ u_2 &\geq \phantom{1}0 \end{aligned} \tag{4}$$

e (3) diventa

$$\{\{u : u_1 = 0\} \cup \{u : -2\, u_1 - u_2 = 4\}\} \cap \{\{u : u_2 = 0\} \cup \{u : -2\, u_1 - 5\, u_2 = 12\}\} \tag{5}$$

che fornisce solo $\hat{u} := (0,0)$ come ottimo, da cui $\hat{x} := (-3/4, 1/4)$.

5) Dimostrare che nel problema di Knapsack 0-1

$$\max \quad \sum_{i=1}^{n} v_i \, x_i$$
$$\sum_{i=1}^{n} w_i \, x_i \leq K$$

dove supponiamo $v_i/w_i \neq v_j/w_j$ per $i \neq j$, esiste un valore $C$ tale che la dualità forte vale per ogni valore $K \geq C$ ed esistono $n-1$ valori $K_1, \ldots K_{n-1}$, $0 < K_j < C$ tali che la dualità forte vale per ogni valore $K = K_j$, mentre per gli altri valori non si ha dualità forte.

**Soluzione**

La funzione duale è

$$L(u) = -K\, u + \sum_{i=1}^{n} \min_{x_i \in \{0,1\}} (w_i\, u - v_i)\, x_i$$

supponiamo gli indici ordinati per valori crescenti di $v_i/w_i$. La funzione $L(u)$ ha $n$ punti di rottura $v_i/w_i$. Le derivate di $L(u)$ nei tratti lineari valgono

$$\frac{dL(u)}{du} = -K + \sum_{i=j}^{n} w_i, \qquad j = 1, \ldots, n+1$$

Quindi basta porre

$$C := \sum_{i=1}^{n} w_i$$

e $K \geq C$ per avere le CGO soddisfatte con $x_i = 1$, $\forall i$ e $u = 0$. Per gli altri valori basta porre

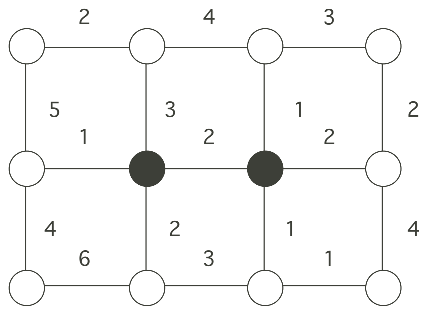
$$K_j := \sum_{i=j+1}^{n} w_i, \qquad j = 1, \ldots, n-1$$

per avere le CGO soddisfatte, con

$$x_i = \begin{cases} 0 & 1 \leq i < j+1 \\ 1 & j+1 \leq i \end{cases}, \quad \frac{v_j}{w_j} < u < \frac{v_{j+1}}{w_{j+1}}, \qquad j = 1, \ldots, n-1$$

Per altri valori di $K$ le CGO non possono essere verificate perché $u > 0$ e $g(x) < 0$ per il valore di $x$ candidato all'ottimalità. Questo valore è comunque ottimo se non esiste una soluzione $x'$ tale che $g(x) < g(x') \leq K$.

6) Determinare il minimo albero di supporto del seguente grafo




con il vincolo che il grado nei nodi indicati in nero sia esattamente uguale a 2. Si adotti un approccio duale. (senza vincoli sul grado il problema del minimo albero di supporto si risolve ordinando i costi degli archi secondo valori crescenti e poi creando l'albero aggiungendo nello stesso ordine gli archi ma escludendo quelli che formano cicli)

**Soluzione**

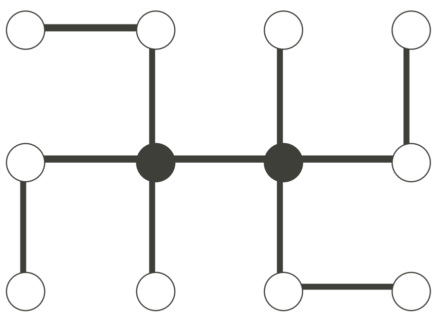
Il problema si può porre nella forma

$$\begin{aligned} \min \quad & c\,x \\ & g_1(x) = 2 \\ & g_2(x) = 2 \\ & x \in X \end{aligned}$$

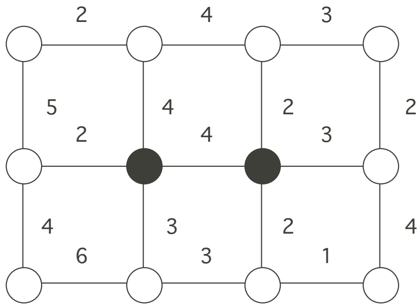
dove $g_1(x)$ e $g_2(x)$ sommano le variabili degli archi incidenti nei due nodi e $X$ è l'insieme degli alberi di supporto. Quindi la funzione duale è

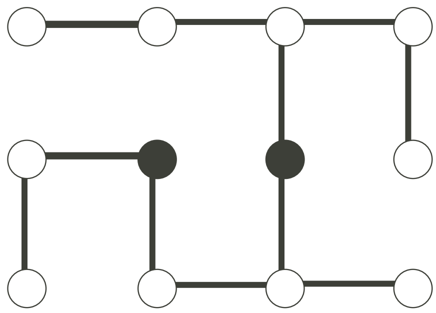
$$L(u_1, u_2) = \min_{x \in X} c\,x + u_1\,(g_1(x) - 2) + u_2\,(g_2(x) - 2)$$

Per ogni valore di $u$ si tratta di risolvere un problema di minimo albero di supporto. Per $u = 0$ si ottiene il seguente albero:



Essendo l'unico albero che si ottiene per $u = 0$, $L(u)$ è differenziabile in 0 e il gradiente vale $(2, 2)$. Si consideri allora il punto $u = (1, 1)$. I costi degli archi vengono modificati come indicato in figura e, fra gli alberi di costo minimo, vi è uno che soddisfa il vincolo del grado ed è quindi ottimo.


2
4
3
5
4
2
2
2
4
3
4
3
2
4
6
3
1



7) Come costruire un'istanza di TSP in modo che la dualità forte sia verificata per un arbitrario valore fissato delle variabili duali? Si fornisca un esempio concreto.

**Soluzione**

Si fissi $u := \hat{u}$ e si scelga a caso un circuito. Si assegnino dei valori $d_{ij}$ agli archi in modo che un minimo quasi albero di supporto sia il circuito scelto. Poi si calcoli $c_{ij} := d_{ij} + \hat{u}_i + \hat{u}_j$.

8) Come costruire un'istanza non banale (ad esempio non con tutti i costi uguali) del problema *simple plant location* (vedi esempio 5.13 delle dispense) in modo che la dualità forte sia verificata per un opportuno valore delle variabili duali? Si fornisca un esempio concreto.

**Soluzione**

Si consideri $m = 4$ e $n = 6$. Si fissi la seguente soluzione come ottimo:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi $\hat{y} = (1, 0, 1, 1)$. Siccome $\hat{x}_{ij} < \hat{y}_i$ implica $\hat{u}_{ij} = 0$, le variabili duali ancora da determinare corrispondono agli asterischi nella seguente matrice

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Possiamo assegnare questi valori in modo arbitrario, ad esempio:

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Inoltre, dalla funzione duale, se $\hat{y}_i > 0$ allora $\sum_j \hat{u}_{ij} = d_i$, altrimenti basta che sia $\sum_j \hat{u}_{ij} \leq d_i$. Questo implica $d_1 = 5$, $d_2 \geq 3$, $d_3 = 3$, $d_4 = 2$. Fissiamo $d_2 = 3$. Restano da assegnare i costi $c_{ij}$. Devono essere tali che $c_{ij} + \hat{u}_{ij}$ è minimo rispetto ad $i$ in corrispondenza del valore $\hat{x}_{ij} = 1$ per ogni $j$. Quindi se $c_{11} = 3$, si deve avere $c_{11} + \hat{u}_{11} = 3 + 3 = 6 \leq c_{21} + 1$, $6 \leq c_{31} + 0$, $6 \leq c_{41} + 0$; e in modo simile se $c_{32} = 1$, si deve avere $c_{32} + \hat{u}_{32} = 1 + 2 = 3 \leq c_{12} + 0$, $3 \leq c_{22} + 0$, $3 \leq c_{42} + 0$; se $c_{33} = 4$, si deve avere $c_{33} + \hat{u}_{33} = 4 + 1 = 5 \leq c_{13} + 0$, $5 \leq c_{23} + 0$, $5 \leq c_{43} + 0$; se $c_{14} = 1$, si deve avere $c_{14} + \hat{u}_{14} = 1 + 2 = 3 \leq c_{24} + 1$, $3 \leq c_{34} + 0$, $3 \leq c_{44} + 0$; se $c_{45} = 2$, si deve avere $c_{45} + \hat{u}_{45} = 2 + 0 = 2 \leq c_{15} + 0$, $2 \leq c_{25} + 1$, $2 \leq c_{35} + 0$; se $c_{46} = 4$, si deve avere $c_{46} + \hat{u}_{46} = 4 + 2 = 6 \leq c_{16} + 0$, $6 \leq c_{26} + 0$, $6 \leq c_{36} + 0$; ad esempio si può scegliere

$$c = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 & 1 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 7 & 1 & 4 & 4 & 3 & 7 \\ 6 & 3 & 7 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

A questo punto $\hat{x}$ e $\hat{u}$ soddisfano le CGO.